UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebras de operadores en espacios L^p asociadas a grafos orientados

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

María Eugenia Rodríguez

Director de tesis: Guillermo Cortiñas
Consejero de estudios: Guillermo Cortiñas

Buenos Aires, 2016

Álgebras de operadores en espacios L^p asociadas a grafos orientados

Resumen

Esta tesis está dedicada al estudio de representaciones por operadores acotados en espacios L^p del álgebra de Leavitt L_Q de un grafo.

Sean Q un grafo orientado finito por filas y L_Q su álgebra de Leavitt sobre $\mathbb{C}$. Para $p \in [1, \infty)$ consideramos la noción de representación espacial de L_Q por operadores lineales y acotados en un espacio $L^p(X, \mu)$, que generaliza la introducida por N. C. Phillips par el caso en que Q es la rosa de d pétalos, y L_Q el álgebra de Leavitt L_d.

Para cada p consideramos la completación $\mathcal{O}^p(Q)$ de L_Q bajo la norma

$$\|a\| := \sup_{\rho \text{ espacial}} \|\rho(a)\| \ \ (a \in L_Q).$$

Probamos que si L_Q es simple y ρ es una L^p representación espacial no nula de L_Q entonces $\|a\|_\rho := \|\rho(a)\|$ no depende de ρ. En particular si L_Q es simple, $\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L_Q)}$ para cualquier representación espacial no nula ρ.

Probamos que si Q y F son dos grafos finitos por filas, y p y q distintos, no existe un morfismo continuo de $\mathcal{O}^p(Q)$ en $\mathcal{O}^q(F)$.

Probamos además que $\mathcal{O}^p(Q)$ es simple si y sólo si L_Q lo es. Aquí, una L^p álgebra de operadores $\mathcal{A}$ se dice simple si todo morfismo no nulo de $\mathcal{A}$ en otra L^p álgebra de operadores es inyectivo. Esta definición de simplicidad no coincide con la de álgebras de Banach, pues podrían existir ideales cerrados que no sean el núcleo de un morfismo contractivo entre L^p álgebras de operadores, al contrario de lo que sucede en el caso de C^*-álgebras.

Probamos que existe una biyección entre la clase de ideales $\mathbb{S}^1$ invariantes en $\mathcal{O}^p(Q)$ y el conjunto de subconjuntos de vértices hereditarios y saturados de Q. Este resultado es un análogo a la biyección ya conocida entre ideales graduados del álgebra de Leavitt y los subconjuntos de vértices hereditarios y saturados.

Para Q finito por filas arbitrario, calculamos la K-teoría topológica de $\mathcal{O}^p(Q)$ y probamos que coincide con la de la C^*-álgebra de Cuntz-Krieger de Q.

Palabras clave: Grafos orientados; L^p álgebra de operadores; Representaciones espaciales; Álgebra simple; Ideal $\mathbb{S}^1$ invariante; Conjuntos hereditarios y saturados; K-teoría.

L^p operator algebras associated with directed graphs

Abstract

This thesis is devoted to the study of Leavitt path algebra representations by bounded operators on L^p spaces.

Let Q be a row finite directed graph and L_Q the associated Leavitt algebra over $\mathbb{C}$.

For $p \in [1, \infty)$ we consider a notion of spatial representation of the Leavitt algebra L_Q on spaces of the form $L^p(X, \mu)$. This generalizes the definition introduced by N. C. Phillips for the case where the graph Q is the rose with d petals, and L_Q is the Leavitt algebra L_d.

For each p, we consider the closure $\mathcal{O}^p(Q)$ of L_Q with respect to the norm

$$||a|| := \sup_{\rho \text{ spatial}} ||\rho(a)|| \ \ (a \in L_Q).$$

We prove that if L_Q is simple and ρ is a nonzero L^p spatial representation of L_Q, then $||a||_\rho := ||\rho(a)||$ does not depend on ρ. In particular, if L_Q is simple, the equality $\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L_Q)}$ holds for any nonzero spatial representation ρ.

Let Q and F be row finite graphs. We show that if $p, q \in [1, \infty)$ are different then there is no nonzero continuous homomorphism from $\mathcal{O}^p(Q)$ to $\mathcal{O}^q(F)$.

We also prove that $\mathcal{O}^p(Q)$ is simple if and only if L_Q is simple. Here an L^p operator algebra $\mathcal{A}$ is called simple if every nonzero contractive homomorphism from $\mathcal{A}$ to another L^p operator algebra is injective. This definition of simplicity is not the same as for Banach algebras, because, unlike what happens with C^*-algebras, an L^p operator algebra may have a closed ideal which is not the kernel of any contractive homomorphism to another L^p-operator algebra.

In addition, we give a bijection between the class of gauge-invariant ideals in $\mathcal{O}^p(Q)$ and the set of hereditary and saturated subsets of vertices of Q. This result can be viewed as an analogue of the known bijection between graduated ideals of the Leavitt algebra and the set of hereditary and saturated subsets of vertices.

Finally, for Q a row finite graph, we calculate the topological K-theory of $\mathcal{O}^p(Q)$ and we prove that it agrees with the K-theory of the Cuntz-Krieger C^*-algebra of Q.

Keywords: Directed graphs; L^p operator algebras; Spatial representations; Simple algebra; Gauge-invariant ideals; Hereditary and saturated sets; K-theory.

Agradecimientos

Antes que nadie a Willie por haber aceptado dirigirme, por haberme prestado su tiempo cada vez que le he golpeado la puerta de su oficina y especialmente en estos últimos meses.

A Esteban Andruchow, Mikhailo Dokuchaev y Demetrio Stojanoff por la buena predisposición para leer esta tesis.

A Dani Carando por respondernos un montón de dudas muchas veces que corríamos a buscarlo.

A mis compañeros y amigos, Gi y Diego por haberme escuchado, explicado y colaborado siempre que lo necesité.

A Debi y a Moni, que ya es un clásico agradecerles pero se lo merecen porque es admirable la manera en que hacen su trabajo y más.

Por último a mi familia por haberme apoyado siempre, y a Pablo por su gran paciencia y contención de todos los días.

Contents

Introducción

Esta tesis estudia una L^p álgebra de operadores particular, en especial condiciones necesarias y suficientes de simplicidad y el cálculo de sus grupos de K-teoría K_0 y K_1.

Un grafo dirigido es un objeto que consiste de vértices y aristas orientadas que unen dos vértices. Los grafos pueden ser representados por operadores sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$: los vértices son representados por proyecciones sobre subespacios cerrados mutuamente ortogonales, y las aristas por isometrías parciales entre subespacios apropiados. Se llama álgebra de un grafo a la C^*-subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ generada por dichos operadores.

En 1977, J. Cuntz [9] construye la C^*-álgebra $\mathcal{O}_d$ (actualmente conocida como álgebra de Cuntz) generada por d isometrías que satisfacen ciertas relaciones y prueba, entre otras cosas, que es simple si $d \geq 2$. El álgebra de Cuntz también puede ser definida como la clausura, con respecto a una norma adecuada, del rango de una $*$-representación del álgebra de Leavitt L_d sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Las álgebras de Leavitt fueron introducidas por Leavitt en [17]; en [18] se demuestra que dichas álgebras son simples.

Más adelante, en 1980, J. Cuntz y W. Krieger [10] estudian una familia de C^*-álgebras que coincide con la C^*-álgebra de un grafo Q (la notamos $C^*(Q)$). En el caso en que el grafo es aquel que tiene un vértice y d aristas (y notamos $Q = R_d$), el álgebra de Cuntz coincide con la C^*-álgebra de ese grafo y en particular con el álgebra Cuntz-Krieger.

En 2006, M. Tomforde [25] da condiciones necesarias y suficientes sobre el grafo Q para decidir cuándo $C^*(Q)$ es simple. Estas condiciones son muy fáciles de verificar sobre el grafo. Dos años más tarde, G. Abrams y G. Aranda Pino [3] construyen el análogo algebraico a la C^*-álgebra $C^*(Q)$, que es el álgebra de caminos de Leavitt L_Q y coincide con L_d cuando el grafo es $Q = R_d$. Su principal resultado es que L_Q es simple si y solo si $C^*(Q)$ es simple.

Por otro lado, la K-teoría asociada a una C^*-álgebra A, los grupos abelianos $K_0(A)$ y $K_1(A)$, contiene gran información acerca de cómo es el álgebra. En 2004, I. Raeburn y W. Szymański [24] calculan los grupos $K_0(C^*(Q))$ y $K_1(C^*(Q))$ asociados a un grafo Q finito por filas. Y en 2009, P. Ara, M. Brustenga y G. Cortiñas [6] calculan, entre otros resultados, la K-teoría del álgebra de Leavitt L_Q para Q un grafo finito por filas.

Unos años más tarde, en 2012 C. Phillips se pregunta qué pasaba en un contexto distinto al de espacios de Hilbert y contruye ([20]) álgebras análogas a las Cuntz pero sobre espacios $L^p(X,\mu)$ y con $p \in [1,\infty)$, que notaremos $\mathcal{O}_d^p$. En el caso en que $p = 2$, vale que $\mathcal{O}_d^2 = \mathcal{O}_d$. Además prueba que si $d_1, d_2 \in \{2,3,\ldots\}$ son arbitrarios y $p_1 \neq p_2 \in [1,\infty)$, entonces no existe un morfismo continuo y no nulo de $\mathcal{O}_{d_1}^{p_1}$ en $\mathcal{O}_{d_2}^{p_2}$.

En trabajos que siguieron, [21] y [22], Phillips calcula su K-teoría y muestra que $\mathcal{O}_d^p$ es simple.

En esta tesis se construye un análogo a las álgebras Cuntz-Krieger en un contexto L^p y se extiende el trabajo de Phillips a cualquier grafo finito por filas. Estas álgebras serán notadas $\mathcal{O}^p(Q)$. Más aún, al igual que en las álgebras de Cuntz-Krieger, obtenemos condiciones necesarias y suficientes de simplicidad y se calculan sus grupos abelianos K_0 y K_1.

Convenciones. En este trabajo los grafos los asumiremos finitos por filas, salvo ejemplos específicos y/o resultados en los que sus hipótesis sean más particulares (como por ejemplo, algunos resultados validos para grafos finitos).

Los espacios $L^p(X,\mu)$ que consideramos son con $p \in [1,\infty)$.

Las álgebras de Leavitt pueden ser definidas sobre un anillo R. Para nosotros el anillo es simpre $R = \mathbb{C}$.

Desarrollo. Esta tesis se centra en el estudio de representaciones por operadores acotados en espacios L^p del álgebra de Leavitt de un grafo finito por filas Q.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos: el Capítulo 1 contiene una breve introducción a las álgebras de caminos de Leavitt y se presentan las representaciones espaciales que serán las análogas a las isometrías parciales y proyecciones consideradas por Cuntz y Krieger para definir el álgebra $C^*(Q)$ en el caso L^2. En nuestro caso, para representar el álgebra de Leavitt L_Q serán necesarias las representaciones espaciales introducidas por Phillips en [20]. Daremos además condiciones de espacialidad.

Los Capítulos 2, 3 y 4 contienen la mayor parte de los resultados originales de la tesis. Estos capítulos se dividen en tres partes destacadas: la construcción del álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$, su clasificaciòn en cuanto a su simplicidad, y el cálculo de su K-teoría cuando L_Q es simple.

Más precisamente, en el Capítulo 2 se define (Definición 2.1) el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ como la completación de el álgebra de Leavitt L_Q respecto de la norma

$$\|a\| := \sup_{\rho \text{ espacial}} \|\rho(a)\| \ \ (a \in L_Q). \tag{1}$$

El resultado más importante de este capítulo es la independencia de la espacialidad en la norma cuando el álgebra L_Q es simple (Teorema 2.2.12).

Probamos que si L_Q es simple y ρ es una L^p representación espacial no nula de L_Q entonces $\|a\|_\rho := \|\rho(a)\|$ no depende de ρ. En particular si L_Q es simple, $\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L_Q)}$ para cualquier representación espacial no nula ρ. Además, probamos (Teorema 2.3.7) que si Q y F son dos grafos finitos por filas, y p y q son distintos, no existe un morfismo continuo no nulo de $\mathcal{O}^p(Q)$ en $\mathcal{O}^q(F)$.

En el Capítulo 3 clasificamos las L^p álgebras $\mathcal{O}^p(Q)$ que son simples. Probamos (Teorema 3.4.2 y Teorema 3.4.3) que $\mathcal{O}^p(Q)$ es simple si y sólo si L_Q lo es. Aquí, una L^p álgebra de operadores $\mathcal{A}$ se dice simple (en el sentido de álgebra universal) si todo morfismo no nulo de $\mathcal{A}$ en otra L^p álgebra de operadores es inyectivo. Esta definición de simplicidad no coincide con la de álgebras de Banach, pues podrían existir ideales cerrados que no sean el núcleo de un morfismo contractivo entre L^p álgebras de operadores, al contrario de lo que sucede en el caso de C^*-álgebras (ver [12, Theorem I.5.4]).

Otra parte importante de este cápitulo son los ideales $\mathbb{S}^1$-invariantes de $\mathcal{O}^p(Q)$. Probamos (Teorema 3.3.7) que existe una biyección entre esta clase de ideales y el conjunto de subconjuntos de vértices hereditarios y saturados del grafo. Este resultado es un análogo a la biyección ya conocida entre ideales graduados del álgebra de Leavitt y los subconjuntos de vértices hereditarios y saturados probada por Ara y Aranda Pino en [3].

Finalmente, en el Capítulo 4 calculamos la K-teoría de $\mathcal{O}^p(Q)$. Para Q finito por filas arbitrario y L_Q simple, probamos (Teorema 4.2.9) que la K-teoría topológica de $\mathcal{O}^p(Q)$ coincide con la del álgebra de Cuntz-Krieger $C^*(Q)$.

Chapter 1

Álgebras de Leavitt

En este capítulo haremos primero una breve introducción a las álgebras de Leavitt. A continuación nos concentraremos en las representaciones espaciales de estas álgebras, y probaremos condiciones necesarias de espacialidad. Dichas representaciones serán sumamente necesarias para definir el álgebra universal $O^p(Q)$, álgebra en la que se basan todos los resultados de esta tesis.

1.1 Vértices y caminos

Comencemos recordando definiciones necesarias para entender la estructura de un grafo.

Definición 1.1.1 *Un* grafo dirigido $Q := (Q^0, Q^1, r, s)$ *consiste de dos conjuntos* Q^0, Q^1 *(que llamaremos* vértices *y* aristas*), y funciones* $r, s : Q^1 \to Q^0$*. Estas funciones representaran lo que denominamos dominio y rango de cada arista.*

Definimos como $(Q^1)^*$ *al conjunto formado por las aristas de* Q^1 *pero miradas en la dirección opuesta. Lo denotaremos* $(Q^1)^* := \{e^* : \ e \in Q^1\}$.

Un vértice v *tal que* $s^{-1}(v) = \emptyset$ *decimos que es un* pozo*, mientras que un vértice* v *tal que* $r^{-1}(v) = \emptyset$ *decimos que es una* fuente*. A los subconjuntos de vértices que son pozos y a los que son fuentes los denotamos* $Sink(Q)$ *y* $Source(Q)$*, respectivamente.*

Un grafo Q *es* finito *si los conjuntos* Q^0 *y* Q^1 *son finitos.*
Un grafo Q *es* finito por filas *si el conjunto* $s^{-1}(v)$ *es finito para todo* $v \in Q^0$.

Un vértice v *se dice* regular *si* $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$, *y* $Reg(Q)$ *denotará al conjunto de los vértices regulares de* Q.

Un subgrafo $F \subseteq Q$ *es un* subgrafo completo de Q *si para cada vértice regular* $v \in Reg(F)$*, su preimagen por* s *sobre* F *y su preimagen por* s *sobre* Q *coinciden, o sea,* $s_F^{-1}(v) = s_Q^{-1}(v)$.

Una arista e *es un* lazo *si* $s(e) = r(e)$.

Un camino α *en un grafo* Q *es una yuxtaposición de aristas* $\alpha = e_1 \dots e_n$ *tal que* $r(e_i) = s(e_{i+1})$ *para cada* $i = 1, \dots, n-1$. *En este caso,* $l(\alpha) = n$ *representa la* longitud *de* α.

Diremos que un camino $\alpha = e_1 \dots e_n$ *es cerrado si* $s(\alpha) = r(\alpha)$*, donde* $s(\alpha) := s(e_1)$ *y* $r(\alpha) = r(e_n)$.

Un camino $e_1 \dots e_n$ *será un* ciclo *si* $s(e_1) = r(e_n)$ *y* $s(e_i) \neq s(e_j)$ *para todo* $i \neq j$.

Un camino infinito α *es una sucesión de aristas* $\alpha = e_1 \dots e_i \dots$ *tales que* $r(e_i) = s(e_{i+1})$ *para todo* $i \geq 1$.

Una arista e *diremos que es una* salida *de un camino* $e_1 \dots e_n$*, si* $s(e) = s(e_i)$ *para algún* $i = 1, \dots, n$ *y* $e \notin \{e_1, \dots, e_n\}$.

Denotaremos por $\mathcal{P}$ *al conjunto de caminos finitos, y por* $\mathcal{P}_n$ *al conjunto de caminos de longitud* n. *Entonces* $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}_n$.

Si $v \in Q^0$ *y* $n \in \mathbb{N}_0$, $P(n, v)$ *será el conjunto de caminos* α *tales que* $l(\alpha) = n$ *y* $r(\alpha) = v$.

Definiremos un preorden (o sea, una relación reflexiva y transitiva) en Q^0 *de la siguiente manera:*

$$w \leq v \iff \exists\, \alpha \in \mathcal{P} \text{ tal que } s(\alpha) = v \text{ y } r(\alpha) = w. \tag{1.1}$$

Un vértice v *en un grafo* Q *es* cofinal *si para todo* γ *que es un camino infinito o es tal que* $r(\gamma)$ *es un pozo, existe un vértice* w *en el camino* γ *tal que* $w \leq v$. *Decimos que el grafo* Q *es* cofinal *si lo son todos los vértices de* Q.

1.2 Álgebra de caminos

En esta sección presentaremos al álgebra de caminos de Leavitt, o simplemente álgebra de Leavitt, y ejemplificaremos a partir de algunos grafos particulares.

Definición 1.2.1 *Sea* Q *un grafo. Sea* L_Q *el álgebra de caminos de Leavitt con coeficientes en* $\mathbb{C}$ *definida como la* $\mathbb{C}$*-álgebra asociativa libre generada por el conjunto* $Q^0 \cup Q^1 \cup (Q^1)^*$*, sujeto a las siguientes relaciones:*

- $vv' = \delta_{v,v'} v \ \forall\, v, v' \in Q^0$,
- $s(e)e = er(e) = e \ \forall\, e \in Q^1$,

- $r(e)e^* = e^* s(e) = e^* \ \forall\ e \in Q^1$,
- *(CK1)* $e^* e' = \delta_{e,e'} r(e) \ \forall\ e, e' \in Q^1$,
- *(CK2)* $v = \displaystyle\sum_{\{e \in Q^1 : s(e) = v\}} ee^*$, *si* $s^{-1}(v) \neq \emptyset$.

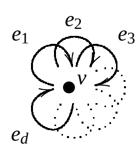
En el álgebra L_Q existe una involución * definida en un elemento $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \beta_i^* \in L_Q$ (donde $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{P}$ y $\lambda_i \in \mathbb{C}$) como

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \beta_i^* \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \beta_i \alpha_i^*.$$

Notar que, en particular, $v^* = v$ para todo $v \in Q^0$.

Ejemplo 1.2.2 *Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Consideremos al grafo que de consiste de un vértice v y d lazos, y notaremos a su álgebra de Leavitt asociada por L_d.*

En el caso en que d sea finito el grafo es



.

Un álgebra con menos relaciones que el álgebra de Leavitt es el álgebra de Cohn. En el caso particular en que tiene cuatro generadores la definimos a continuación y resultará útil para diferenciar $\mathcal{O}^p(Q)$ de $\mathcal{O}^q(Q')$ en la Sección 2.3.

Definición 1.2.3 *Definiremos el álgebra de Cohn C_2 como el álgebra universal compleja y asociativa generada por x_1, x_2, y_1, y_2 que satisface la relación $y_j x_i = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, 2$.*

Definición 1.2.4 *Sean $\{e_1, e_2, \ldots\}$ las infinitas aristas que definen al grafo asociado a L_∞, como en el Ejemplo 1.2.2 para $d = \infty$. Sea $\Psi : L_\infty \to C_2$ el homomorfismo definido por $\Psi(e_i) := x_2^i x_1$ y $\Psi(e_i^*) := y_1 y_2^i$ para $i \in \mathbb{N}$.*

Proposición 1.2.5 *([3, Lemma 1.7]) Sea Q un grafo. Entonces existe una única $\mathbb{Z}-$graduación sobre L_Q determinada por*

$$deg(v) = 0, \ \ deg(e) = 1 \ \ y \ \ deg(e^*) = -1, \ \forall v \in Q^0, \ e \in Q^1.$$

Lema 1.2.6 *Sea Q un grafo finito por filas sin pozos, y sean $a_1, \ldots, a_m \in L_Q$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, un conjunto finito $F \subseteq \mathcal{P}$ y escalares $\lambda^i_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ para cada $i = 1, \ldots m$, $\alpha \in F$ y $\beta \in \mathcal{P}_n$, tales que*

$$a_i = \sum_{\alpha \in F} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_n} \lambda^i_{\alpha,\beta} \alpha \beta^*, \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Demostración. Cada elemento a_i es de la forma

$$a_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i \alpha_j^i \beta_j^{i\,*}.$$

Podemos suponer que todos los caminos β_j^i tienen la misma longitud para todo i y para todo j. En efecto, notemos que si tuviéramos un elemento de la forma $\alpha\beta^*$, alpicando la condición (CK2) de la Definición 1.2.1 en el vértice $v = r(\alpha) = r(\beta)$ resulta que

$$\alpha\beta^* = \sum_{\{e\in Q^1 : s(e)=v\}} \alpha e(\beta e)^*$$

entonces en la suma aparecen caminos "estrella" de longitud uno más que la longitud de β. Notemos que este proceso se puede seguir hasta obtener el largo deseado, ya que no hay pozos en el grafo.

Sea $n := \max_{i,j}\{l(\beta_j^i)\}$. Aplicamos el resultado anterior a los $r(\beta_j^i)$ tales que $l(\beta_j^i) < n$ el número necesario de veces hasta obtener todos lo largo n, entonces en la suma de cada a_i podemos suponer que todos los caminos β_j^i tienen longitud n. Para cada i llamemos F_i al conjunto de los α_j^i y G_i al de los β_j^i.

Reagrupando podemos suponer que para cada i

$$a_i = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{\beta\in\mathcal{P}_n} \lambda_{j,\beta}^i \alpha_j^i \beta^*.$$

Sea $F := \bigcup_{i=1}^{m} F_i$. Por lo tanto, $a_i = \sum_{\alpha\in F} \sum_{\beta\in\mathcal{P}_n} \lambda_{\alpha,\beta}^i \alpha\beta^*$ siendo $\lambda_{\alpha,\beta}^i = 0$ en caso en que $\alpha \notin F_i$ o $\beta \notin G_i$. ■

Definición 1.2.7 *Sean Q un grafo finito por filas y L_Q el álgebra de caminos de Leavitt definida en 1.2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos la $\mathbb{C}$-álgebra $(L_Q)_{0,n}$ como la generada por los elementos $\alpha\beta^*$ tales que $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ y $r(\alpha) = r(\beta)$. La notación la reduciremos a $L_{0,n}$ cuando no haya dudas sobre quién es el grafo.*

Notamos por $(L_Q)_0$ (o simplemente L_0) al conjunto de elementos de grado 0*, respecto de la graduación mencionada en la Proposición* 1.2.5*.*

Proposición 1.2.8 *([8, proof of Theorem 5.3]) Sea $n \in \mathbb{N}_0$. El colímite de $\{(L_Q)_{0,n}, i_{n,n+1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es $(L_Q)_0$, siendo $i_{n,n+1} : L_{0,n} \to L_{0,n+1}$ las inclusiones definidas sobre generadores como*

$$\alpha v\beta^* \mapsto \sum_{\{e\in Q^1 : s(e)=v\}} \alpha e(\beta e)^*.$$

1.3 Representaciones de álgebras de Leavitt sobre espacios de Banach

Cada álgebra de Leavitt puede ser representada por operadores en un espacio de Banach. Más concretamente, nos van a interesar son las representaciones en los espacios de la forma $L^p(X,\mu)$, pero en esta sección daremos resultados más generales acerca de esto.

Lema 1.3.1 *Sea Q un grafo finito por filas sin pozos. Sea B un álgebra unital sobre $\mathbb{C}$, y sean $\varphi,\psi : L_Q \to B$ morfismos tales que para todo $e \in Q^1$ se tiene que $\varphi(e) = \psi(e)$ y $\varphi(ee^*) = \psi(ee^*)$. Entonces $\varphi = \psi$.*

Demostración. Alcanzará con demostrar que ψ y φ coinciden sobre los generadores. Si v es un vértice, como no es un pozo podemos escribir

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{\{e\in Q^1:s(e)=v\}} ee^*\right) = \sum_{\{e\in Q^1:s(e)=v\}} \varphi(ee^*) = \sum_{\{e\in Q^1:s(e)=v\}} \psi(ee^*) = \psi(v)$$

dado que, por hipótesis, $\varphi(ee^*) = \psi(ee^*)\ \forall e \in Q^1$.

Si $e \in Q^1$, sabemos que $e^*ee^* = e^*$, que $\varphi(e^*)\varphi(e) = \varphi(r(e))$ y lo mismo para ψ. Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi(e^*) &= \varphi(e^*)\varphi(ee^*)\\
&= \varphi(e^*)\psi(ee^*)\\
&= \varphi(e^*)\psi(e)\psi(e^*)\\
&= \varphi(e^*)\varphi(e)\psi(e^*)\\
&= \varphi(r(e))\psi(e^*)\\
&= \psi(r(e))\psi(e^*) = \psi(e^*).
\end{aligned}$$

■

Lema 1.3.2 *Sea Q un grafo finito sin pozos. Sea B un álgebra unital sobre $\mathbb{C}$, y sean $\varphi,\psi : L_Q \to B$ homomorfismos unitales tales que para todo $e \in Q^1$ se tiene que $\varphi(e) = \psi(e)$. Entonces $\varphi = \psi$.*

Demostración. Vemos que se cumplen las hipótesis del Lema 1.3.1 y quedará demostrado que $\varphi = \psi$. Basta ver que $\varphi(ee^*) = \psi(ee^*)$ para todo $e \in Q^1$.

Notar que $\sum_{e\in Q^1}\varphi(ee^*) = 1$, y la misma identidad es verdadera para ψ, entonces si $e \in Q^1$ tenemos que:

$$\psi(ee^*)\varphi(ee^*) = \psi(ee^*e)\varphi(e^*) = \sum_{f\in Q^1}\psi(ee^*f)\varphi(f^*) = \sum_{f\in Q^1}\psi(ee^*)\varphi(ff^*) = \psi(ee^*).$$

Además, si $e \neq f$ son dos aristas distintas, se tiene que

$$\psi(ee^*)\varphi(ff^*) = \psi(ee^*)\varphi(ee^*)\varphi(ff^*) = 0.$$

Resulta de estas dos observaciones que

$$\varphi(ee^*) = \sum_{f\in Q^1}\psi(ff^*)\varphi(ee^*) = \psi(ee^*)\varphi(ee^*) = \psi(ee^*).$$

■

Si E es un espacio de Banach notaremos por $\mathcal{L}(E)$ al espacio de operadores lineales acotados de E en E.

A continuación definiremos distintos tipos de representaciones de álgebras de Leavitt en E. En el caso particular L_d, estas representaciones fueron introducidas por Phillips en [20].

Definición 1.3.3 *Sea Q un grafo finito por filas. Sean E un espacio de Banach no nulo y $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(E)$ una representación.*

1. *Decimos que ρ es* contractiva sobre generadores *si para todo $e \in Q^1$, se tiene que $\|\rho(e)\| \leq 1$ y $\|\rho(e^*)\| \leq 1$.*

2. *Decimos que ρ es* forward isometric *si $\rho(e)$ es isométrica para toda arista e.*

Lema 1.3.4 *(Análogo a [20, Lemma 2.18]) Sean Q un grafo finito por filas, E un espacio de Banach no nulo y $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(E)$ una represenatción. Sea $u := \{u_v\}_{v\in Q^0} \subseteq \mathcal{L}(E)$ tal que u_v es inversible en $\rho(v)\mathcal{L}(E)\rho(v)$ para cada $v \in Q^0$. Entonces hay una única representación $\rho_u : L_Q \to \mathcal{L}(E)$ tal que*

$$\rho_u(e) = u_{s(e)}\rho(e), \quad \rho_u(e^*) = \rho(e^*)u_{s(e)}^{-1} \quad y \quad \rho_u(v) = \rho(v) \quad (\forall e \in Q^1,\ v \in Q^0).$$

Demostración. Definiendo la representación sobre los vértices y las aristas como en el enunciado, solo hay que comprobar las relaciones que aparecen en la Definición 1.2.1, y esa prueba es automática. ■

Definición 1.3.5 *(Análogo a [20, Definition 8.1]) Sean Q un grafo finito, $p \in [1,\infty]$, $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida σ-finita y $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$ una representación.*

1. *Decimos que ρ es* libre *si existe una partición $X = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} E_m$ tal que para todo $m \in \mathbb{Z}$, $e \in Q^1$ se tiene*

$$\rho(e)(L^p(E_m,\mu)) \subseteq L^p(E_{m+1},\mu) \quad y \quad \rho(e^*)(L^p(E_m,\mu)) \subseteq L^p(E_{m-1},\mu). \tag{1.2}$$

2. *Decimos que ρ es* aproximadamente libre *si para todo $N \in \mathbb{N}$, existen $n \geq N$ y una partición $X = \bigsqcup_{m=0}^{n-1} E_m$ tales que para $m = 0,\ldots,n-1$ y $e \in Q^1$ se cumple* 1.2, *donde $E_n = E_0$ y $E_{-1} = E_{n-1}$.*

1.4 Representaciones espaciales de L_Q

Para poder definir el álgebra $O^p(Q)$, necesitaremos representar a las álgebras de Leavitt de manera espacial. Dividiremos la sección en dos partes: isometrías parciales espaciales, necesarias para definir las representaciones espaciales, y condiciones de espacialidad.

1.4.1 Isometrías parciales espaciales

En 1958, J. Lamperti introduce [16] el concepto de "semiespacial" (como describiremos abajo) para una isometría entre L^p espacios.

En 2012, Phillips, basandose en la teoría de semiespacialidad de Lamperti, definide las representaciones espaciales en [20] . Algunas de las definiciones y propiedades necesarias de ese trabajo son las que daremos a continuación.

Definición 1.4.1 *Sean $\mathcal{B} := (\mathcal{B},\ ',\vee,\wedge)$ y $\mathcal{C} := (\mathcal{C},\ ',\vee,\wedge)$ dos σ-álgebras de Boole.*

(a) *Un σ-*morfismo *de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ es un morfismo $S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ entre álgebras de Boole en el sentido usual, y además para toda elección de conjuntos $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}$ se tiene que*

$$S\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} S(E_n).$$

(b) *Un σ-*ideal *en $\mathcal{B}$ es un subconjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$ que contiene al elemento* 0, *es cerrado por uniones contables y es tal que para todo $E \in \mathcal{B}$ y $F \in \mathcal{N}$ que satisface $E \wedge F \in \mathcal{N}$ se cumple que $E \in \mathcal{N}$.*

(c) *([20, Lemma 4.14]) Si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$ es un σ-ideal, definimos la relación de equivalencia $\sim$ como:*

$$E \sim F \iff E \triangle F := (E \wedge F') \vee (E' \wedge F) \in \mathcal{N}.$$

Definición 1.4.2 *Sea $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida. Denotamos por $L^0(X,\mu)$ al espacio vectorial de las funciones medible sobre X a valores complejos, módulo las que se anulan en casi todo punto. Si $E\in\mathcal{B}$, denotamos por χ_E a la función característica de E, la cual estará bien definida sobre los elementos de $L^0(X,\mu)$.*

Ejemplo 1.4.3 *[20, Example 4.14] Sea X un conjunto, y sea $\mathcal{B}$ un σ-álgebra sobre X. Sea μ una medida con dominio $\mathcal{B}$. Entonces,*

$$\mathcal{N}(\mu) := \{E \in \mathcal{B} : \ \mu(E) = 0\}$$

es un σ-ideal en $\mathcal{B}$.

Notación 1.4.4 *Si $(X,\mathcal{B},\mu)$ es un espacio de medida y $E\in\mathcal{B}$, notamos por $\mathcal{B}|_E$ a la σ-álgebra de subconjuntos de E que consiste de todos los $F\in\mathcal{B}$ tal que $F\subseteq E$, y la llamamos la restricción de $\mathcal{B}$.*

Definición 1.4.5

(a) *Sean $(X,\mathcal{B},\mu)$ y $(Y,\mathcal{C},\nu)$ espacios de medida. Una* transformación de espacios de medida, o sencillamente transformación, *de $(X,\mathcal{B},\mu)$ en $(Y,\mathcal{C},\nu)$ es un σ-morfismo $S:\mathcal{B}/\mathcal{N}(\mu)\to\mathcal{C}/\mathcal{N}(\nu)$.*

(b) *Sean $(X,\mathcal{B},\mu)$ y $(Y,\mathcal{C},\nu)$ dos espacios de medida σ-finita. Un* sistema semiespacial *para $(X,\mathcal{B},\mu)$ y $(Y,\mathcal{C},\nu)$ es una cuaterna (E,F,S,g) formada por $E\in\mathcal{B}$, $F\in\mathcal{C}$ y S una transformación de medibles inyectiva de $(E,\mathcal{B}|_E,\mu|_E)$ en $(E,\mathcal{C}_0|_F,\nu|_F)$ (donde $\mathcal{C}_0$ en rango de la σ álgebra) tal que $\nu_{ran(S)}$ es σ-finita, y g es una función $\mathcal{C}$-medible definida sobre F tal que $|g(y)|=1$ para casi toda $y\in Y$.*

   Decimos que (E,F,S,g) es un sistema espacial *si, además, S es biyectiva.*

(c) *Sean $(X,\mathcal{B},\mu)$ y $(Y,\mathcal{C},\nu)$ dos espacios de medida σ-finita y sea $p\in[1,\infty]$. Una aplicación lineal $s\in\mathcal{L}(L^p(X,\mu),L^p(Y,\nu))$ es una* isometría parcial semiespacial *si existe un sistema semiespacial (E,F,S,g) tal que, para todo $\xi\in L^p(X,\mu)$, se tiene que*

$$(s\xi)(y) = \begin{cases} g(y)\left(\left[\dfrac{dS_*(\mu_{|_E})}{d(\nu_{|_{ran(S)}})}\right](y)\right)^{1/p} S_*(\xi_{|_E})(y) & y\in F \\ 0 & y\notin F \end{cases}$$

   Cuando $p=\infty$ tomamos $\left[\dfrac{dS_*(\mu_{|_E})}{d(\nu_{|_{ran(S)}})}\right]^{1/p}$ como la constante 1.

   La medida $\left[\dfrac{dS_*(\mu_{|_E})}{d(\nu_{|_{ran(S)}})}\right]$ es la medida de Radon-Nikodym.

(d) *Decimos que s es una* isometría parcial espacial *si el sistema (E, F, S, g) es espacial. Llamamos a E y a F* dominio soportado *y* rango soportado *de s, respectivamente.*

Ejemplo 1.4.6 *Sea Q un grafo finito por filas con numerables vértices. Consideremos los conjuntos $\mathcal{P}_e$, que son los conjuntos de caminos que empiezan en una arista e y $\mathcal{P}_v$ los caminos que empiezan en el vértice v, y μ la medida discreta.*

Sea $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}))$ la representación definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \rho(v)((f_p)_{p\in\mathcal{P}}) & \mapsto & (f_p)_{vp\in\mathcal{P}_v} \\ \rho(e)((f_p)_{p\in\mathcal{P}}) & \mapsto & (f_p)_{ep\in\mathcal{P}_e} \\ \rho(e^*)((f_p)_{p\in\mathcal{P}_e}) & \mapsto & (f_p)_{e^*p\in\mathcal{P}} \end{array}$$

En particular, como hay numerables caminos, tenemos una representación espacial de L_Q sobre el espacio de sucesiones $\ell^p(\mathbb{N})$.

Notación 1.4.7 *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $p \in [1, \infty]$. Sea $m_X : L^\infty(X, \mu) \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ el morfismo definido por*

$$m_X(f)(\xi)(x) := f(x)\xi(x)$$

para $f \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in L^p(X, \mu)$ y $x \in X$.

Lema 1.4.8 *([20, Lemma 6.12, (3)]) Si $s \in \mathcal{L}(L^p(X, \mu), L^p(Y, \nu))$ es una isometría parcial espacial con sistema espacial (E, F, S, μ), entonces existe una única isometría parcial espacial $t \in \mathcal{L}(L^p(Y, \nu), L^p(X, \mu))$ cuyo sistema espacial es $(F, E, S^{-1}, (S^{-1})_*(g)^{-1})$. Además, s y t satisfacen que $ts = m_X(\chi_E)$ y $st = m_Y(\chi_F)$.*

Definición 1.4.9 *Si s y t son las isometrías parciales espaciales del Lema 1.4.8 llamamos a t la* reversa *de s.*

1.4.2 Condiciones de espacialidad

En [20], Phillips da condiciones necesarias de espacialidad de representaciones para el caso particular del álgebra de Leavitt L_d que definimos en el Ejemplo 1.2.2. Extenderemos algunas de estos resultados al caso general de un álgebra de Leavitt L_Q.

Lema 1.4.10 *([20, Lemma 6.15]) Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e (Y, C, ν) dos espacios de medida σ-finita. Sea $p \in [1, \infty]$ y sea $s \in \mathcal{L}(L^p(X, \mu), L^p(Y, \nu))$ una isometría parcial semiespacial con dominio soportado $E \subseteq X$, rango soportado $F \subseteq Y$, y rango de σ-álgebra C_0. Entonces son equivalentes:*

(a) *s es espacial.*

(b) *ran*$(s) = L^p(F, \mu)$.

(c) $C_0 = C \mid_F$.

Definición 1.4.11 *Sean Q un grafo, $p \in [1, \infty]$, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y sea $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ una representación.*

1. *Decimos que ρ es* disjunta *si para cada $e \in Q^1$ existen conjuntos disjuntos $X_e \subseteq X$ tales que ran$(\rho(e)) \subseteq L^p(X_e, \mu)$.*

2. *Decimos que ρ es* espacial *si para cada $e \in Q^1$, los operadores $\rho(e)$ y $\rho(e^*)$ son isometrias parciales espaciales (Definición [1.4.5), (5)], con $\rho(e^*)$ la reversa de $\rho(e)$ en el sentido de la Definición 1.4.9.*

Lema 1.4.12 *Sea Q un grafo finito sin pozos. Sean $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ una representación unital disjunta y forward isometric. Entonces ρ es espacial.*

Demostración. Como Q es finito entonces L_Q tiene unidad. Luego, comprobamos que definiendo $\sigma(e) := \rho(e)$ y $\sigma(e^*)$ a la reversa (en el sentido de la Definición 1.4.9) de $\sigma(e)$, para cada $e \in Q^1$, se obtiene una representación espacial $\sigma : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$. Por Lema 1.3.2 σ y ρ coinciden, y es claro que entonces ρ es espacial. ∎

Lema 1.4.13 *Sea Q un grafo finito por filas. Sean $p \in [1, \infty]$, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ una representación espacial. Entonces:*

(a) *ρ es contractiva sobre generadores.*

(b) *ρ es disjunta.*

(c) *Para cada $e \in Q^1$ existe un subconjunto $X_e \subseteq X$ tal que ran$(\rho(e)) = L^p(X_e, \mu)$.*

Demostración. El ítem (a) se sigue de [20, Lemma 6.5(2)] y el ítem (c) de Lema 1.4.10.

Para probar el ítem (b), sean X_e como en (c) para cada arista e. Supongamos que e y f son dos aristas distintas tales que $\mu(X_e \cap X_f) \neq 0$. Entonces $\rho(e^*)\rho(f)$ es una isometría parcial espacial no nula por [20, Lemma 6.17], con $\mathrm{ran}(\rho(f)) = L^p(X_f)$, $\mathrm{dom}(\rho(e*)) = \mathrm{ran}(\rho(e)) = L^p(X_e)$ y $\mathrm{dom}(\rho(e^*)\rho(f)) = L^p(S_f^{-1}(X_f \cap X_e))$. El conjunto $\mathrm{dom}(\rho(e^*)\rho(f))$ es de medida nula, por la relación $e^* f = 0$ en la Definición 1.2.1, entonces es de medida nula. Luego, $\mu(X_e \cap X_f) = 0$ lo que contradice lo que estabamos suponiendo. ∎

Chapter 2

El álgebra universal $\mathcal{O}^p(Q)$

Diremos que $\mathcal{A}$ es una L^p-*álgebra de operadores* si existen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y una representación isométrica $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(L^p(X))$. Nos interesará el caso particular $\mathcal{O}^p(Q)$ que definiremos a continuación.

2.1 Definición de $\mathcal{O}^p(Q)$: la completación de L_Q

En esta sección se tratará el caso particular de la L^p-álgebra de operadores $\mathcal{O}^p(Q)$ con Q un grafo finito por filas.

Este álgebra será definida para grafos finitos por filas de la siguiente manera:

Sean $p \in [1, \infty)$ y $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Definimos el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ como la completación del álgebra de Leavitt L_Q en la norma

$$||a|| \; := \; \sup_{\rho} ||\rho(a)|| \; (a \in L_Q) \tag{2.1}$$

(el supremo es sobre las representaciones espaciales ρ de L_Q definidas en la Sección 1.4.2).

Notemos por

$$||a||_\rho := ||\rho(a)|| \tag{2.2}$$

a cada seminorma considerada en (2.1).

Proposición 2.1.1

(a) *El conjunto*

$$S := \{p : L_Q \to \mathbb{R}_{\geq 0} / \exists\, \rho \text{ representación espacial de } L_Q \text{ tal que } p = ||\cdot||_\rho\}$$

es no vacio.

(b) *($\forall a \in L_Q$) $\|a\| = \sup_{p\in S} p(a) < \infty$.*

(c) *La seminorma definida en el ítem anterior es una norma y $\mathcal{O}^p(Q) := \overline{L_Q}$ (completación con esa misma norma) es una L^p-álgebra de operadores.*

Demostración.

Sea I un conjunto de subíndices tal que

$$S = \{\|\cdot\|_{\rho_i} : \rho_i \text{ espacial y } \|\cdot\|_{\rho_i} \neq \|\cdot\|_{\rho_j} \ (\forall i \neq j)\}.$$

Para cada $i \in I$, la representación ρ_i está representada en un espacio de la forma $L^p(X_i)$, o sea $\rho_i : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X_i))$.

Sean $X := \bigsqcup_{i\in I} X_i$ y la representación espacial ($\neq 0$) $\sigma : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X))(\simeq \mathcal{L}\left(\bigsqcup_{i\in I} L^p(X_i)\right))$ definida por $\sigma := (\rho_i)_{i\in I}$.

Veamos que $\|a\| = \|a\|_\sigma$ para todo $a \in L_Q$. Es claro que $\|a\|_\rho \leq \|a\|$. Por otro lado,

$$\|a\| = \sup_{\rho} \|\rho(a)\| = \sup_{i\in I} \|\rho_i(a)\|$$

y además

$$\|a\|_\sigma = \sup_{\{\xi=(\xi_i)_{i\in I}:\|\xi\|=1\}} \|\sigma(a)\xi\| = \sup_{i\in I} \sup_{\|\xi_i\|=1} \|\rho_i(a)\xi_i\| \geq \|\rho_i(a)\| \ \ (\forall i \in I).$$

Por lo tanto, también vale la otra desigualdad

$$\|a\|_\sigma \geq \|a\|.$$

Para ver que si $\|a\| = 0$ entonces $a = 0$, basta considerar la representación espacial inyectiva dada en el Ejemplo 1.4.6.

Como $\rho(v) \neq 0$ para todo vértice v, por el Teorema de Unicidad para álgebras de Leavitt [2, Theorem 2.2.15], tenemos que ρ es inyectiva.

Como $0 = \|a\| = \|\sigma(a)\|$, se tiene que $\rho(a) = 0$ y por lo tanto $a = 0$. ∎

Ejemplo 2.1.2 *Cuando $p = 2$ la L^2 álgebra $\mathcal{O}^2(Q)$ coincide con la C^*-álgebra del grafo Q, la $C^*(Q)$ (ver [23]).*

2.2 Caracterización de $\mathcal{O}^p(Q)$ cuando L_Q es simple

Lo esencial del capítulo es la demostración de que la norma definida en (2.1) se alcanza en todas las representaciones espaciales no nulas cuando el álgebra de Leavitt es simple.

Entonces, la seminorma (2.2) no depende de ρ. En particular si L_Q es simple, $\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L_Q)}$ para cualquier representación espacial no nula ρ. Este es el resultado más importante de este capítulo.

Primero analizaremos el caso en que el grafo no tiene fuentes, estos resultados serán los pasos previos al caso general.

2.2.1 Representaciones torcidas por un operador inversible

Una herramienta importante en este capítulo será poder respresentar a L_Q, de una manera distinta a partir de un operador inversible en $\mathcal{L}(L^p(Y,\mu))$ y una representación arbitraria. Esto es lo que estudiaremos a continuación y compararemos las normas de estas representaciones.

Lema 2.2.1 *Sea $p \geq 1$. Sean $(X,\mathcal{B},\mu)$ y (Y,C,ν) dos espacios de medida $\sigma-$finita. Sean $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$ una representación y $u \in \mathcal{L}(L^p(Y,\nu))$ un operador inversible. Entonces existe una única representación $\rho^u : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X\times Y,\mu\times\nu))$ tal que, para todo $e \in Q^1$, se tiene*

$$\rho^u(e) = \rho(e)\otimes u \ \ and \ \ \rho^u(e^*) = \rho(e^*)\otimes u^{-1}.$$

Dicha representación tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $\alpha \in L_Q$ es un elemento homogéneo de grado k (con respecto a la $\mathbb{Z}$-graduación definida en la Proposición 1.2.5), entonces $\rho^u(\alpha) = \rho(\alpha)\otimes u^k$.

(b) Si u es isométrico, $p \neq 2$ y ρ espacial, entonces ρ^u es espacial.

(c) Si existe $Y = \coprod_{m\in\mathbb{Z}} F_m$ una partición tal que $u(L^p(F_m,\nu)) = L^p(F_{m+1},\nu)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, entonces ρ^u es libre en el sentido de la Definición 1.3.5.

Demostración. Consideremos, para cada $v \in Q^0$, los elementos inversibles $u_v := \rho(v)\otimes u$ en $(\rho(v)\otimes 1)\mathcal{L}(L^p(X\times Y,\mu\times\nu))(\rho(v)\otimes 1)$ con inversa $\rho(v)\otimes u^{-1}$, y la representación $\rho\otimes_p 1 : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X\times Y,\mu\times\nu))$. Podemos aplicar el Lema 1.3.4 y resulta que existe una única representación $(\rho\otimes 1)_u : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X\times Y,\mu\times\nu))$ tal que

$$(\rho\otimes 1)_u(v) = (\rho\otimes 1)(v)$$

y

$$(\rho\otimes 1)_u(e) = u_{s(e)}(\rho\otimes 1)(e) \ \text{ y } \ (\rho\otimes 1)_u(e^*) = (\rho\otimes 1)(e^*)u_{s(e)}^{-1}.$$

Por lo tanto, resulta que

$$\begin{aligned}(\rho\otimes 1)_u(e) &= u_{s(e)}(\rho\otimes 1)(e)\\ &= (\rho(s(e))\otimes u)(\rho(e)\otimes 1)\\ &= \rho(s(e))\rho(e)\otimes u\\ &= \rho(e)\otimes u.\end{aligned}$$

Notemos que, de forma análoga al cálculo anterior, tenemos que $(\rho\otimes 1)_u(e^*) = \rho(e^*)\otimes u^{-1}$.

Definimos la representación como: $\rho^u := (\rho\otimes 1)_u$.

Es claro que si $\alpha = e_1\dots e_n \in \mathcal{P}_n$ y $\beta = f_1\dots f_m \in \mathcal{P}_m$ tal que $n-m = k$, entonces tenemos que $\rho^u(\alpha\beta^*) = \rho(\alpha\beta^*)\otimes u^{n-m}$. De esto se sigue (a).

Probemos el ítem (b). Por [20, Lemma 6.16], tenemos que u es espacial, y aplicando [20, Lemma 6.20], resulta que $\rho(e) \otimes u$ es espacial con reversa $\rho(e^*) \otimes u^{-1}$ $\forall e \in Q^1$. Luego, ρ^u es espacial.

Considerando la partición
$$X \times Y = \coprod_{m \in \mathbb{Z}} X \times F_m$$
es claro que ρ^u es libre y por lo tanto queda demostrado el ítem (c). ■

Observación 2.2.2 *En el ítem* ***(b)*** *del Lema 2.2.1 se usa $p \neq 2$ para garantizar que u sea espacial.*

Proposición 2.2.3 *Sea Q un grafo finito. Sean $p \in [1, \infty)$, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, y $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ una representación. Sea $u \in \mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{Z}))$ el operador shift, $(u(x))(m) := x(m-1)$ para $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Sea ρ^u como en el Lema 2.2.1. Entonces para todo $a \in L_Q$ se tiene que $\|\rho^u(a)\| \geq \|\rho(a)\|$.*

Demostración. La demostración es muy técnica y es básicamente la misma que para el caso de el álgebra de Leavitt L_d probado en [20, Proposition 8.3]. Esencialemente necesitamos una graduación en L_Q que la tenemos dada por la Proposición 1.2.5 y el Lema 2.2.1 que ya lo demostramos antes. Con estas herramientas el argumento de la demostración es igual. ■

2.2.2 Disjuntando el espacio de medida

Para demostrar que en el caso simple la completación no depende de la represenatción, como mencionamos antes, serán necesarios resultados previos que veremos a continuación.

En particular el Lema 2.2.4, requiere en gran parte de argumentos relacionados con propiedades de grafos específicamente. Esto es lo que diferencia mayormente de la demostración de Phillips (ver [20, Lemma 8.5]) en el caso L_d donde el grafo es conocido.

Lema 2.2.4 *Sea Q un grafo finito por filas tal que L_Q es simple. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita con $\mu \neq 0$. Sean $\{X_v\}_{v \in Q^0} \subset X$ de medida no nula y $\{X_e\}_{e \in Q^1} \subset X$ conjuntos medibles disjuntos tales que $X = \coprod_{v \in Q^0} X_v$ y $X_v = \coprod_{\{e : s(e) = v\}} X_e$ $(\forall v \in Q^0)$, y para cada $e \in E^1$ sea*
$$S_e : (X_{r(e)}, \mathcal{B}_{|X_{r(e)}}, \mu_{|X_{r(e)}}) \to (X_e, \mathcal{B}_{|X_e}, \mu_{|X_e})$$
una transformación biyectiva.

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y todo $v \in Q^0$ existen conjuntos $E_v \in \mathcal{B}$ tales que $\mu(E_v) \neq 0$, y tales que para todo camino $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$ que termina en v, y $\forall$ $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ los siguientes elementos
$$S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_m}([E_v]) \in \mathcal{B}/\mathcal{N}(\mu)$$
son disjuntos.

Previo a la demostración introduciremos algo de notación y haremos algunas observaciones.

Definición 2.2.5 *Definimos el siguiente orden parcial en el conjunto de caminos $\mathcal{P}$:*

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \exists\, \gamma \text{ tal que } \beta = \alpha\gamma.$$

Es claro que esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Observación 2.2.6 *Sea X como en el Lema 2.2.4. Para cada camino γ, definimos el conjunto $X_\gamma := S_\gamma(X_{r(\gamma)})$. Notar que $\mu(X_\gamma) \neq \emptyset$ si y solo si $\mu(X_{r(\gamma)}) \neq \emptyset$*

Si $\alpha \geq \beta$, entonces $X_\beta \subseteq X_\alpha$ pues $X_\beta = S_\alpha(X_\gamma) \subseteq S_\alpha(X_{r(\alpha)}) = X_\alpha$.

Usando la propiedad (CK2) de la Definición 1.2.1, para todo vértice v y todo n, se tiene que

$$X_v = \coprod_{\{\alpha\in\mathcal{P}_n : s(\alpha)=v\}} X_\alpha.$$

Supongamos que $\alpha \ngeq \beta$ y que $\alpha \nleq \beta$. Si $s(\alpha) \neq s(\beta)$, $X_\alpha \cap X_\beta \subseteq X_{s(\alpha)} \cap X_{s(\beta)} = \emptyset$.

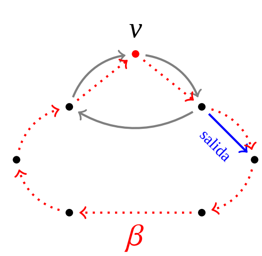
Si $s(\alpha) = s(\beta)$, existen caminos $\gamma, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{P}$ con $l(\gamma) \geq 0$ y $\theta_1 \neq \theta_2$ tal que $\alpha = \gamma\theta_1$ y $\beta = \gamma\theta_2$. Como S_γ es inyectiva, entonces $X_\alpha \cap X_\beta = S_\gamma(X_{\theta_1} \cap X_{\theta_2}) = S_\gamma(\emptyset) = \emptyset$.

Luego, si α y β no son caminos comparables, y resulta que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$.

Demostración. (Lema 2.2.4)

Consideremos todos los vértices que v que están contenidos en al menos un ciclo. Para cada uno de esos v, sea $\alpha := \alpha_v$ un ciclo basado en v y sea β un camino cerrado definido de la siguiente manera: comienza en v, recorre el ciclo α hasta la salida, que siempre existe, saliendo y regresando luego al ciclo finalizando en v por cofinalidad.

Gráficamente el camino β sería:



Definimos el siguiente camino infinito:

$$\gamma := \alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\ldots.$$

Sea γ_i la i-ésima arista para cada $i \in \mathbb{N}$.

Este camino tiene la propiedad de que:

$$\nexists \text{ un camino finito } \mu \text{ tal que } \mu\mu \geq \gamma. \tag{2.3}$$

Para probarla, consideremos un camino μ. Si $s(\mu) \neq r(\mu)$, entonces $\mu\mu = 0$. Entonces podemos asumir que $s(\mu) = s(\alpha) = r(\mu) = v$. Suponiendo que $\mu\mu \geq \gamma$, llegamos a una contradicción.

Si μ termina en α, entonces $\mu = \alpha$ (caso en que es claro que $\alpha\alpha \ngeq \gamma$) o es de la forma $\mu = \alpha\beta\epsilon\alpha$. Como $\mu\mu = \alpha\beta\epsilon\alpha\alpha\beta\epsilon\alpha$, se desprenden dos casos de este último;

Si $l(\epsilon) = 0$, entonces $\mu\mu = \alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha \ngeq \gamma$. Si $l(\epsilon) > 0$, entonces podemos escribir a ϵ de la forma $\epsilon = \alpha p$ con $p \in \mathcal{P}$. Resulta que

$$\mu\mu = \alpha\beta\alpha p\alpha\alpha\beta\alpha p\alpha$$

y en particular $\alpha\beta\alpha p\alpha\alpha\beta\alpha \geq \mu\mu$, por lo tanto, si $\mu\mu \geq \gamma$ por transitividad

$$\alpha\beta\alpha p\alpha\alpha\beta\alpha \geq \gamma$$

que resulta falso.

Similarmente, probaremos que μ no termina en β. Resulta que, o bien $\mu = \alpha\beta$, pero $\alpha\beta\alpha\beta \ngeq \gamma$, o $\mu = \alpha\beta\epsilon\beta$ con $l(\epsilon) > 0$. Veamos que este último caso tampoco es posible. Por un argumento similar al anterior, si $\mu\mu \geq \gamma$, como $\alpha\beta\epsilon\beta\alpha\beta \geq \mu\mu$, entonces resultaría que

$$\alpha\beta\epsilon\beta\alpha\beta \geq \gamma$$

que es absurdo.

Luego, queda probada la afirmación.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $v \in E^0$. Definimos el conjunto medible $E_v \in \mathcal{B}$ como

$$E_v := X_{\gamma_1 \ldots \gamma_{2n}}.$$

Por la Observación 2.2.6, $\mu(E_v) \neq \emptyset$.

Falta probar que, dados dos caminos distintos $\eta \neq \tau$ tales que $r(\eta) = r(\tau) = v$, de longitud k y l respectivamente ($k, l \leq n$), entonces

$$S_\eta(E_v) \cap S_\tau(E_v) = \emptyset.$$

Supongamos que $k \leq n$ y $l = 0$. Como $S_\eta(E_v) = X_{\eta\gamma_1 \ldots \gamma_{2n}}$ es suficiente ver que los caminos $\eta\gamma_1 \ldots \gamma_{2n}$ y $\gamma_1 \ldots \gamma_{2n}$ no son comparables, por la Observación 2.2.6. Si existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $\eta\gamma_1 \ldots \gamma_{2n} p = \gamma_1 \ldots \gamma_{2n}$, entonces η y p tienen longitud cero y por tanto $\eta = \tau = v$, pero eran distintos por hipótesis.

Supongamos ahora que $\eta\gamma_1 \ldots \gamma_{2n} = \gamma_1 \ldots \gamma_{2n} p$ para algún $p \in \mathcal{P}$, entonces $\eta = \gamma_1 \ldots \gamma_k$ para $1 \leq k \leq 2n$. Luego,

$$\gamma_1 \ldots \gamma_k \gamma_1 \ldots \gamma_k \ldots \gamma_{2n} = \gamma_1 \ldots \gamma_{2n} p$$

lo que implica que
$$\gamma_1 \dots \gamma_k \gamma_1 \dots \gamma_k = \gamma_1 \dots \gamma_{2k} \geq \gamma,$$
pero por (2.3) esto no puedo suceder.

Sea $k > 0$ y $l > 0$ dos números naturales cualesquiera. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $k \leq l$. Por un argumento de longitud $\eta \not< \tau$. Por la Observación 2.2.6 la única posibilidad es que sean caminos comparable, más aún $\eta \geqslant \tau$.

Por otra parte, $\tau = \eta\delta$. Luego,
$$S_\eta(E_v) \cap S_\tau(E_v) = S_\eta(E_v \cap S_\delta(E_v)) = \emptyset$$
pues $E_v \cap S_\delta(E_v) = \emptyset$ usando el primer caso probado.

Entonces construimos espacios medibles E_v que cumplen la propiedad del enunciado pero solamente para vértices que están contenidos en al menos algún ciclo.

Veamos que para el resto de los vértices del grafo basta tomar cualquier espacio medible de medida no nula en cada X_v correspondiente.

Entonces, sea $E_v \subseteq X_v$ cualquiera tal que $\mu(E_v) \neq \emptyset$ solo para los vértices que no pertenecen a ningún ciclo. Fijemos uno de estos v y veamos que si α y β dos caminos distintos, entonces $S_\alpha(E_v) \cap S_\beta(E_v) = \emptyset$.

Observemos que si $r(\alpha), r(\beta) \neq v$ entonces $S_\alpha(E_v) = \emptyset$ y $S_\beta(E_v) = \emptyset$.

Por la Observación 2.2.6, podemos suponer que los caminos son comparables. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha v = \beta v \delta v$. Por lo tanto, δ es un camino cerrado que empieza y termina en v, o sea que v pertenece a algún ciclo. Como estabamos suponiendo que v no pertenecia a ningún ciclo, no existen tales α y β.

Queda demostrado entonces el lema.

■

2.2.3 Independencia de espacialidad para grafos sin fuentes

En esta sección probaremos que si L_Q es simple, entonces $\|a\|_\rho = \|\rho(a)\|$ no depende de la representación espacial ρ. En particular si L_Q es simple, $\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L(Q))}$ para cualquier representación espacial no nula ρ. Entonces concluiremos que el supremo en (2.1) se alcanza en cualquier respresentación espacial no nula.

Es sabido que L_Q es simple si y sólo si Q es cofinal y todos los ciclos tienen salida, ver ([2, Lemma 2.9.6] y [5, Theorem 3.1]). Esta caracterización la usaremos en los siguiente capítulos.

Comenzaremos probando un resultado muy técnico y previo a la demostración de la independecia de las representaciones mencionada arriba.

Proposición 2.2.7 *Sea Q un grafo finito por filas y sin fuentes, tal que L_Q es simple. Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ espacios de medida $\sigma-$finita, y $p \in [1, \infty) - \{2\}$. Sea $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ una representación espacial aproximadamente libre, y sea $\varphi : L_Q \to L(L^p(Y, \nu))$ una representación espacial. Entonces para todo $a \in L_Q$, resulta que $\|\rho(a)\| \leq \|\varphi(a)\|$.*

Demostración. La demostración de [20, Proposition 8.6] se adapta completamente a nuestro caso en L_Q, pero dado su arduo tecnicismo preferimos incluir todos los argumentos nuevos dentro del contexto general y no darlos de forma aislada. Por definición, los operadores $\varphi(e)$ y $\rho(e)$ son isometrías parciales espaciales $\forall e \in Q^1$. Además, sus sistemas espaciales son $(Y_{r(e)}, Y_e, S_e, g_e)$ y $(X_{r(e)}, X_e, R_e, h_e)$ respectivamente, en los cuales S_e y R_e son tranformaciones biyectivas entre conjuntos medibles.

Sea $a \in L_Q$. Queremos probar que $\|\rho(a)\| \leq \|\varphi(a)\|$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|\rho(a)\| = 1$. Por Lema 1.2.6 existen un $N_0 \in \mathbb{N}_0$ y un subconjunto finito $F_0 \subseteq \mathcal{P}$ tales que

$$a = \sum_{\alpha \in F_0} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_{N_0}} \lambda_{\alpha,\beta} \alpha \beta^*, \quad (\lambda_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}).$$

Sea $H \subseteq Q^0$ definido como $H := \{s(\alpha) : \alpha \in F_0\}$. Elegimos un único camino $\tau_v \in \mathcal{P}_{N_0}$ para cada vértice $v \in H$ tal que $r(\tau_v) = v$. Definimos

$$\tau := \sum_{v \in H} \tau_v.$$

Sean $b := \tau a$, $F := \{\tau_{s(\alpha)}\alpha : \alpha \in F_0\}$ y $N_1 := \max_{\alpha \in F_0}\{l(\alpha)\}$. Entonces,

$$b = \tau a = \sum_{\eta \in F} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_{N_0}} \lambda_{\eta,\beta} \eta \beta^*.$$

Dado que ρ y φ son contractivas sobre generadores resulta que $\|\rho(\tau)\| = \|\rho(\tau^*)\| = 1$ por Lema 2.3.2. Luego, como $a = \tau^*\tau a = \tau^* b$,

$$\begin{aligned} \|\rho(a)\| &= \|\rho(\tau^*)\rho(b)\| \\ &\leq \|\rho(\tau^*)\|\|\rho(b)\| \\ &= \|\rho(b)\| \\ &\leq \|\rho(\tau)\|\|\rho(a)\| \\ &= \|\rho(a)\|, \end{aligned}$$

entonces $\|\rho(b)\| = \|\rho(a)\| = 1$, y análogamente $\|\varphi(a)\| = \|\varphi(b)\|$.

Por lo observado antes, será suficiente probar que $1 = \|\rho(b)\| \leq \|\varphi(b)\|$.

Sea $\epsilon > 0$. Veamos que $\|\varphi(b)\| > 1 - \epsilon$.

Si $N_0 = N_1 = 0$, entonces b es una combinación lineal de vértices, y por tanto la desigualdad es inmediata.

En otro caso, $N_0 + N_1 > 0$ y elegimos $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

$$r > (N_0 + N_1)\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^p.$$

Como $\|\rho(b)\| = 1$, podemos tomar $\xi^{(0)} \in L^p(X,\mu)$ de norma 1 y tal que $\|\rho(b)\xi^{(0)}\|_p > 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Como ρ es aproximadamente libre, existen $N > (N_0 + N_1)r$ y subconjuntos $D_0, \ldots, D_N \subseteq X$ tales que:

- $X = \coprod_{m=0}^{N-1} D_m$.

- Para todo $e \in Q^1$, con $D_N := D_0$ y $D_{-1} := D_{N-1}$, tenemos:

$$\rho(e)(L^p(D_m,\mu)) \subseteq L^p(D_{m+1},\mu) \text{ y } \rho(e^*)(L^p(D_m,\mu)) \subseteq L^p(D_{m-1},\mu)\ (0 \le m \le N-1).$$

Escribimos $\xi^{(0)} = \sum_{m=0}^{N-1} \xi_m^{(0)}$ con $\xi_m^{(0)} \in L^p(D_m,\mu)$ para $m = 0, \ldots, N-1$.

Afirmamos que existe un conjunto T de $N_0 + N_1$ valores consecutivos m tales que

$$\|\sum_{m\in T} \xi_m^{(0)}\|_p < \frac{\epsilon}{2}.$$

Probemos esta afirmación. Observemos que, como los conjuntos D_m son disjuntos, tenemos

$$\left\|\sum_{m\in T} \xi_m^{(0)}\right\|_p^p = \sum_{m\in T} \|\xi_m^{(0)}\|_p^p.$$

Supongamos que no existe tal conjunto T. Entonces, en particular, para $k = 0, \ldots, r-1$ existen $n_k \in [k(N_0+N_1), (k+1)(N_0+N_1))$ tales que

$$\|\xi_{n_k}^{(0)}\|_p \ge \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{N_0+N_1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto,

$$\|\xi^{(0)}\|_p^p \ge \sum_{k=0}^{r-1} \|\xi_{n_k}^{(0)}\|_p^p \ge r\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \frac{1}{N_0+N_1} > 1$$

contradiciendo el hecho de que $\|\xi^{(0)}\|_p = 1$. esto prueba la afirmación.

Por ciclicidad podemos permutar los índices de los conjuntos D_m, y asumir que $T = \{0, \ldots, N_0-1, N-N_1, \ldots, N-1\}$, entonces

$$\left\|\sum_{m=0}^{N_0-1} \xi_m^{(0)} + \sum_{m=N-N_1}^{N-1} \xi_m^{(0)}\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Definimos

$$\xi_m := \begin{cases} \xi_m^{(0)} & N_0 \leq m \leq N - N_1 - 1 \\ 0 & 0 \leq m \leq N_0 - 1 \ \wedge \ N - N_1 \leq m \leq N - 1 \end{cases}$$

y

$$\xi := \sum_{m=0}^{N-1} \xi_m = \xi^{(0)} - \sum_{m \in T} \xi_m^{(0)}.$$

Luego, $\|\xi - \xi^{(0)}\| < \frac{\epsilon}{2}$, y por tanto

$$\|\rho(b)\xi\| > \|\rho(b)\xi^{(0)}\| - \|\rho(b)(\xi - \xi^{(0)})\| > 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \epsilon.$$

Es claro además, que $\|\xi\| \leq \|\xi^{(0)}\| = 1$.

Por [20, Lemma 2.17] existe una representación $\psi : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X \times Y, \mu \times \nu))$ dada por $\psi(c) := 1 \otimes \varphi(c), \ \forall c \in L_Q$. Más aún, se cumple que $\|\psi(b)\| = \|\varphi(b)\|$.

Sean S_e y R_e las transformaciones biyectivas entre medibles descriptas en el Lema 2.2.4 y que corresponden a $\rho(e)$ y $\varphi(e)$ respectivamente, para $e \in E^1$.

Dado que $X = \coprod_{e \in E^1} X_e$ y la identificación que hacemos de los conjuntos con sus imágenes en $\mathcal{B}/\mathcal{N}(\mu)$, tenemos que

$$D_{m+1} = \coprod_{e \in E^1} R_e(D_m), \ m = 0, \ldots, N-2.$$

Sea $W := \mathcal{P}_{<N}$, y para cada camino $\gamma \in W$ definimos el conjunto $D_\gamma := R_\gamma(D_0)$ con $R_\gamma := R_{\gamma_1} \circ \ldots \circ R_{\gamma_n}$ para $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_n$. Entonces,

$$X := \coprod_{\gamma \in W} D_\gamma. \tag{2.4}$$

Para $\gamma \in W$, definimos $e_\gamma := m(\chi_{D_\gamma}) \in \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ (siguiendo la Notación 1.4.7). Luego, los elementos e_γ son idempotentes de norma 1 y su suma es 1.

Otra manera de pensar al conjunto W es como una unión de subconjuntos de caminos en W que terminan en el mismo vértice. Definimos para cada vértice $v \in Q^0$ los conjuntos

$$W_v := \{\gamma \in W : \ r(\gamma) = v\}.$$

Sea $v \in Q^0$, aplicando el Lema 2.2.4 existe un conjunto $E_v \subseteq Y$ con $\nu(E_v) \neq 0$ tal que los conjuntos $E_{v,\gamma} := S_\gamma(E_v)$ son disjuntos para $\gamma \in W_v$. Entonces,

$$\varphi(\gamma)(L^p(E_v, \nu)) = L^p(E_{v,\gamma}, \nu), \ \forall \ \gamma \in W_v.$$

Elegimos, para cada $v \in Q^0$, $\eta_v \in L^p(E_v, \nu)$ tal que $\|\eta_v\|_p = 1$.

Sea $u : L^p(X,\mu) \longrightarrow L^p(X \times Y, \mu \times \nu)$ el operador definido por

$$u(\xi) := \sum_{v \in Q^0} \sum_{\gamma \in W_v} \rho(\gamma^*) e_\gamma(\xi) \otimes \varphi(\gamma)\eta_v, \quad (\xi \in L^p(X,\mu)).$$

Afirmamos que u es isométrica.

En efecto, como los conjuntos D_γ son disjuntos, los resultados (2.4) y [20, Remark 2.7] muestran que $\|\xi\|_p^p = \sum_{\gamma \in W} \|e_\gamma(\xi)\|_p^p$. Por otro lado,

$$\operatorname{ran}(e_\gamma) = L^p(D_\gamma, \mu) \subseteq \operatorname{ran}(\rho(\gamma))$$

y $\rho(\gamma^*)$ es una isometría sobre $\operatorname{ran}(\rho(\gamma))$. En particular, es una isometría sobre la imágen de e_γ, y por lo tanto

$$\|\rho(\gamma *) e_\gamma(\xi)\|_p = \|e_\gamma(\xi)\|_p.$$

Además, los elementos $\rho(\gamma^*)e_\gamma(\xi) \otimes \varphi(\gamma)\eta_v$ están soportados sobre conjuntos disjuntos $X \times E_{v,\gamma}$ y $\|\varphi(\gamma)\eta_v\|_p = \|\eta_v\|_p = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u(\xi)\|_p^p &= \left\| \sum_{v \in E^0} \sum_{\gamma \in W_v} \rho(\gamma^*) e_\gamma(\xi) \otimes \varphi(\gamma)\eta_v \right\|_p^p \\
&= \sum_{v \in E^0} \sum_{\gamma \in W_v} \|\rho(\gamma^*) e_\gamma(\xi)\|_p^p \|\varphi(\gamma)\eta_v\|_p^p \\
&= \sum_{\gamma \in W} \|e_\gamma(\xi)\|_p^p \\
&= \|\xi\|_p^p.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración de que u es una isometría.

Ahora, sean $G_0 := \mathcal{P}_{\leq N_1}$ y $G := \bigcup_{m=N_0}^{N_0+N_1} \mathcal{P}_m$. Como $F \subseteq G$ podemos escribir a

$$b = \sum_{\alpha \in G} \sum_{\beta \in \mathcal{P}_{N_0}} \lambda_{\alpha,\beta} \alpha\beta^*$$

siendo $\lambda_{\alpha,\beta} = 0$ para $\alpha \in G \setminus F$.

Veamos que para cualquier elemento $\xi \in L^p(X,\mu)$ soportado en

$$\bigcup_{m=N_0}^{N-N_1-1} \bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}_m} D_\gamma,$$

y cualquier $b \in L_Q$ (no necesariamente el b usado antes), tenemos que:

$$u(\rho(b))\xi = \psi(b)u(\xi). \tag{2.5}$$

Por linealidad será suficiente probar (2.5) para $\xi \in L^p(D_\gamma)$ con $\gamma \in W$ y $N_0 \leq l(\gamma) \leq N - N_1 - 1$.

Sea $\gamma = \gamma_0\gamma_1$ con $\gamma_0 \in W_{N_0}$ y $0 \leq l(\gamma_1) \leq N - N_0 - N_1 - 1$. Como

$$\xi \in L^p(D_\gamma) \subseteq \operatorname{ran}(\rho(\gamma)) \subseteq \operatorname{ran}(\rho(\gamma_0))$$

resulta que $\rho(\gamma_0)\rho(\gamma_0^*)\xi = \xi$.

Para todo $\beta \in \mathcal{P}_{N_0}$, $\beta^*\gamma_0 = \delta_{\beta,\gamma_0}$, luego

$$\begin{aligned}
\rho(b)\xi &= \sum_{\alpha\in G}\sum_{\beta\in\mathcal{P}_{N_0}} \lambda_{\alpha,\beta}\rho(\alpha)\rho(\beta^*)\rho(\gamma_0)\rho(\gamma_0^*)\xi \\
&= \sum_{\{\alpha\in G: r(\alpha)=r(\gamma_0)\}} \lambda_{\alpha,\gamma_0}\rho(\alpha)\rho(\gamma_0^*)\xi.
\end{aligned}$$

Como $\gamma = \gamma_0\gamma_1$ y $\xi \in L^p(D_\gamma)$, entonces $\rho(\gamma_0^*)\xi \in L^p(D_{\gamma_1})$.

Sea $\alpha \in G$ tal que $r(\alpha) = r(\gamma_0)$. Como $N_0 \leq l(\alpha) \leq N_0 + N_1$ y $0 \leq l(\gamma_1) \leq N - N_0 - N_1 - 1$, se sigue que $N_0 \leq l(\alpha) + l(\gamma_1) \leq N - 1$ y $\rho(\alpha)\rho(\gamma_0^*)\xi \in L^p(D_{\alpha\gamma_1})$.

Luego,

$$\begin{aligned}
u(\rho(\alpha)\rho(\gamma_0^*)\xi) &= \sum_{v\in E^0}\sum_{\gamma'\in W_v} \rho(\gamma'^*)e_{\gamma'}(\rho(\alpha)\rho(\gamma_0^*)\xi) \otimes \varphi(\gamma')\eta_v \\
&= \rho((\alpha\gamma_1)^*)\rho(\alpha)\rho(\gamma_0^*)\xi \otimes \varphi(\alpha\gamma_1)\eta_v \\
&= \rho(\gamma_1^*\alpha^*\alpha\gamma_0^*)\xi \otimes \varphi(\alpha\gamma_1)\eta_v \\
&= \rho(\gamma^*)\xi \otimes \varphi(\alpha\gamma_1)\eta_v
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Entonces $u\rho(b)\xi = \sum_{\alpha\in G}\lambda_{\alpha,\gamma_0}\rho(\gamma^*)\xi \otimes \varphi(\alpha\gamma_1)\eta_v$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi(b)u(\xi) &= (1 \otimes \varphi(b))(\rho(\gamma^*)\xi \otimes \varphi(\gamma)\eta_v) \\
&= \sum_{\alpha\in G}\sum_{\beta\in\mathcal{P}_{N_0}} \lambda_{\alpha,\beta}\rho(\gamma^*)\xi \otimes \varphi(\alpha)\varphi(\beta^*)\varphi(\gamma)\eta_v \\
&= \sum_{\alpha\in G} \lambda_{\alpha,\gamma_0}\rho(\gamma^*)\xi \otimes \varphi(\alpha)\varphi(\gamma_1)\eta_v.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Comparando (2.6) con (2.7), probamos la ecuación (2.5).

Volviendo a las elecciones de ξ y de b tomadas al principio, que satisfacen las hipótesis para (2.5), se tiene que

$$||\psi(b)u\xi||_p = ||u\rho(b)\xi||_p = ||\rho(b)\xi||_p > 1 - \epsilon$$

dado que además u es isométrica.

Para completar la demostración, como $\|\xi\|_p = 1$ y $\|u(\xi)\|_p = 1$ entonces $\|\varphi(b)\| = \|\psi(b)\| > 1 - \epsilon$. ■

Teorema 2.2.8 *Sea Q un grafo finito por filas y sin fuentes, tal que L_Q es simple. Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Sean $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ y $\varphi : L_Q \to L(L^p(Y, \nu))$ representaciones espaciales. Entonces el mapa definido por $\rho(e) \mapsto \varphi(e)$ y $\rho(e^*) \mapsto \varphi(e^*)$ $\forall$ $e \in Q^1$, se extiende a un isomorfismo isométrico $\overline{\rho(L_Q)} \to \overline{\varphi(L_Q)}$.*

Demostración. El resultado a probar es simétrico respecto de ρ y de φ, entonces es suficiente probar que para todo $a \in L_Q$, $\|\varphi(a)\| \leq \|\rho(a)\|$. Sea $u \in L(\ell^p(\mathbb{Z}))$ el operador shift, y sea $\varphi^u : L_Q \to L(L^p(Y, \nu) \otimes \ell^p(\mathbb{Z}))$ definido como en el Lema 2.2.1, entonces la Proposición 2.2.3 implica que $\|\varphi(a)\| \leq \|\varphi^u(a)\|$. Como φ^u es libre por el Lema 2.2.1(c), es espacial por el Lema 2.2.1(b), lo que por la Proposición 2.2.7 implica que $\|\varphi^u(a)\| \leq \|\rho(a)\|$. ■

Usando el Teorema 2.2.8, es claro el siguiente resultado.

Teorema 2.2.9 *Sea Q un grafo finito por filas y sin fuentes, tal que L_Q es simple. Entonces,*

$$\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L_Q)}$$

para cualquier representación espacial ρ de L_Q. O sea, todas las seminormas (2.2) coinciden.

2.2.4 Independencia de espacialidad: caso general

Extenderemos el Teorema 2.2.8 al caso en que el grafo es finito por filas teniendo que adaptar algunos resultados a este contexto y para esto necesitaremos el caso sin fuentes probado en la Subsección 2.2.3.

Si Q es un grafo con fuentes, podemos construir un grafo sin fuentes $\widehat{Q}$ de manera que exista una inclusión isométrica entre $\mathcal{O}^p(Q)$ y $\mathcal{O}^p(\widehat{Q})$. Esto nos permitirá extender el Teorema 2.2.9 a caulquier grafo finito por filas.

Proposición 2.2.10 *Sea Q un grafo finito por filas. Sea $\widehat{Q}$ el grafo que se obtiene de agregar una "cola" a cada fuente z de la siguiente forma*

$$\ldots \bullet \xrightarrow{g_3} \bullet_{w_2} \xrightarrow{g_2} \bullet_{w_1} \xrightarrow{g_1} \bullet_z. \tag{2.8}$$

Entonces la inclusión natural $\mathcal{O}^p(Q) \hookrightarrow \mathcal{O}^p(\widehat{Q})$ es isométrica.

Demostración. Sea $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X))$ una representación espacial de L_Q. Definimos el conjunto $Y := X \sqcup \bigsqcup_{z \text{ fuente}} (X_z \times \mathbb{N})$. Notemos que existen, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, isometrías $\tau_n : L^p(X_z) \to L^p(X_z \times \{n\})$ (donde τ_0 es la identidad). Definimos la representación espacial

$$\widehat{\rho} : \mathcal{O}^p(\widehat{Q}) \to \mathcal{L}(L^p(Y))$$

como ρ sobre el grafo Q, y sobre los vértices y aristas que agregamos como

$$\widehat{\rho}(w_n) := Id_{L^p(X_z\times\{n\})},$$

y

$$\widehat{\rho}(g_n) := \tau_{n+1}\circ\tau_n^{-1}.$$

Veamos que la inclusión $\mathcal{O}^p(Q)\hookrightarrow\mathcal{O}^p(\widehat{Q})$ es isométrica.

Sea $a\in L_Q$. Si ρ es una representación espacial de L_Q, de la misma manera que antes, podemos construir una representación espacial $\widehat{\rho}$ de $L_{\widehat{Q}}$, entonces

$$\|\rho(a)\| = \|\widehat{\rho}(a)\| \leq \|a\|_{\mathcal{O}^p(\widehat{Q})}$$

y tomando supremo sobre las representaciones espaciales de L_Q

$$\|a\|_{\mathcal{O}^p(Q)} \leq \|a\|_{\mathcal{O}^p(\widehat{Q})}.$$

De manera analoga, si consideramos una representación espacial de $L_{\widehat{Q}}$, restringimos obteniendo una representación espacial de L_Q, y tenemos la otra desigualdad. Luego, las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{O}^p(Q)}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{O}^p(\widehat{Q})}$ coinsiden sobre L_Q y como L_Q es denso en $\mathcal{O}^p(Q)$, las normas coinciden sobre $\mathcal{O}^p(Q)$. ■

Observación 2.2.11 *Sea Q un grafo finito por filas y $\widehat{Q}$ el grafo que se obtiene de sacarle las fuentes a Q (Proposición 2.2.10). Si L_Q es simple, entonces $L_{\widehat{Q}}$ es simple.*

Demostración. Abrams y Aranda Pino probaron ([2, Lemma 2.9.6] y [5, Theorem 3.1]) que L_Q es simple si y solo si el grafo Q es cofinal y todo ciclo tiene salida. Entonces basta con chequear que esto sucede en el caso de $\widehat{Q}$ sabiendo que Q lo verifica. Notar que la construcción de $\widehat{Q}$ no agrega pozos ni ciclos nuevos al grafo. En particular todo ciclo sigue teniendo salida. Además, los caminos infinitos que podrían agregarse a los que ya estaban en Q son los que comienzan en alguna "cola" y continuan hasta algún camino infinito en Q. De modo que $\widehat{Q}$ es cofinal. ■

Por lo tanto, concluimos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.12 *Sea Q un grafo finito por filas tal que L_Q es simple. Entonces,*

$$\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho(L_Q)}$$

para cualquier representación espacial ρ de L_Q. O sea, todas las seminormas (2.2) coinciden.

Demostración. Sean $a\in L_Q$ y $\rho: L_Q\to\mathcal{L}(L^p(X))$ una representación espacial de L_Q. Tenemos que ver que $\|a\|_{\mathcal{O}^p(Q)} = \|\rho(a)\|$. Como en la Proposición 2.2.10 construimmos una representación espacial $\widehat{\rho}:\mathcal{O}^p(\widehat{Q})\to\mathcal{L}(L^p(Y))$ del álgebra de Leavitt $L_{\widehat{Q}}$ del grafo sin fuentes

$\widehat{Q}$. Del hecho de que la inclusión $\mathcal{O}^p(Q) \hookrightarrow \mathcal{O}^p(\widehat{Q})$ es isométrica (Proposición 2.2.10) y el caso sin fuentes aplicado a $\widehat{Q}$ (Teorema 2.2.9 y Observación 2.2.11), resulta que

$$||a||_{\mathcal{O}^p(Q)} = ||a||_{\mathcal{O}^p(\widehat{Q})} = ||\widehat{\rho}(a)|| = ||\rho(a)||.$$

■

Phillips definió $\mathcal{O}^p(L_d)$ para $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la misma forma que para el caso finito. En el Ejemplo 1.2.2, el caso particular $d = \infty$ define un grafo que no es finito por filas, por lo tanto no es un caso particular nuestro. Sin embargo, vale el mismo Teorema 2.2.12 y fue demostrado también por Phillips en [20]. Notemos que cuando $d = \infty$, el grafo de un vértice y d aristas es simple (si d es finito también es cierto pero es un caso particular de grafo finito), entonces vale que:

Ejemplo 2.2.13 *(Phillips [20]) Si ρ es una representación espacial de L_∞ (definida en [20]), entonces*

$$\mathcal{O}^p(L_\infty) = \overline{\rho(L_\infty)}.$$

En la siguiente sección incluiremos representaciones espaciales de L_∞.

2.3 $\mathcal{O}^p(Q)$ contra $\mathcal{O}^q(Q')$

Concluiremos este capítulo estudiando la relación entre dos completaciones del tipo (2.1) para dos grafos finitos y p, q distintos. Más concretamente, probaremos que no existe un morfismo continuo de una completación en la otra.

Veamos primero algunos resultados previos.

Definición 2.3.1 *Sean $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathcal{L}(L^p(X))$ isometrías parciales espaciales con inversas $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Decimos que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ortogonales si $\tau_j\sigma_i = 0$ y $\sigma_i\tau_j = 0$ $\forall i \neq j$.*

Lema 2.3.2 *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma-$finita, y sea $p \in [1, \infty)$. Sean $\tau_1, \ldots, \tau_n$ isometrías parciales espaciales con sus respectivos sistemas espaciales ortogonales (X_i, Y_i, S_i, g_i), $(i = 1, \ldots, n)$. Si notamos $\tau := \sum_{i=1}^{n} \tau_i$, entonces $||\tau|| = 1$.*

Demostración. Sea $\xi \in L^p(X)$. Existen $\xi_i \in L^p(X_i)$ (para $i = 1, \ldots, n$) y $\eta \in L^p(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_i)$

tales que $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i + \eta$. Sea $B \subseteq \mathcal{L}(L^p(X))$ la bola cerrada de radio 1. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\tau\| &= \sup_{\|\xi\|=1} \|\tau(\xi)\| \\ &= \sup_{\xi \in B} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\tau_i(\xi_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\xi \in B} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\|\xi\|=1} \|\xi\| = 1 \end{aligned}$$

■

Definición 2.3.3 *Sea Q un grafo con al menos un ciclo. Sea C el subconjunto de vértices que pertenecen, por lo menos, a un ciclo de Q. Sea $\iota : C_2 \to L_Q$ el morfismo definido a partir de generadores por*

$$\iota(x_1) = \sum_{v \in C} \alpha_v, \quad \iota(x_2) = \sum_{v \in C} \beta_v \ \ y \ \ \iota(y_i) = (\iota(x_i))^* \ (i = 1, 2),$$

donde α_v y β_v son los ciclos basados en v, definidos en el Lema 2.2.4.

Lema 2.3.4 *Sean $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y Q un grafo con al menos un ciclo. Sean $\Psi : L_\infty \to C_2$ y $\iota : C_2 \to L_Q$ los morfismos de la Definición 1.2.4 y de la Definición 2.3.3. Supongamos que $\rho : L_Q \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ es una representación espacial, entonces la composición $\rho \circ \iota \circ \Psi : L_\infty \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ es también una representación espacial.*

Demostración. Tenemos que probar que $\rho \circ \iota \circ \Psi(e_i)$ y $\rho \circ \iota \circ \Psi(e_i^*)$ son isometrías parciales espaciales para todo $i \in \mathbb{N}$. Por definición,

$$\rho \circ \iota \circ \Psi(e_i) = \sum_{v \in C} \rho(\beta_v)^i \rho(\alpha_v)$$

y

$$\rho \circ \iota \circ \Psi(e_i^*) = \sum_{v \in C} (\rho(\alpha_v^*))^i \rho(\beta_v^*)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como ρ es espacial y $(\beta_v^i \alpha_v)^* (\beta_w^i \alpha_w) = 0$ para $v \neq w$, entonces $\rho(\beta_v^i \alpha_v)$ es una isometría espacial.

Sea $F := \bigsqcup_{v\in C} X_{e_v}$. Sea $F_i := \bigsqcup_{v\in C} X_{\beta_v^i\alpha_v}$, el rango de $\rho(\beta_v)^i\rho(\alpha_v)$ es $L^p(X_{\beta_v^i\alpha_v})$ y el rango de $\rho\circ\iota\circ\Psi(e_i)$ es $L^p(F_i)\subseteq L^p(F)$.

Además, $\rho\circ\iota\circ\Psi(e_i)$ es isométrico. Sea $f\in\mathcal{L}(L^p(X,\mu))$, entonces existe un único vértice v tal que $\rho\circ\iota\circ\Psi(e_i)(f)=\rho(\beta_v)^i\rho(\alpha_v)(f)$.

Como $\rho(\beta_v)^i\rho(\alpha_v)$ es una composición de isometrías parciales, resulta que

$$\|\rho\circ\iota\circ\Psi(e_i)(f)\| = \|f\|.$$

Por [20, Lemma 6.16] y el Lema 2.3.2, $\rho\circ\iota\circ\Psi(e_i)$ es una isometría espacial en el sentido de la Definición 1.4.5, y tiene dominio (soporte) X y rango (soporte) F.

Análogamente, $\rho\circ\iota\circ\Psi(e_i^*)$ resulta una isometría espacial.

■

Teorema 2.3.5 *Sean $p,q\in[1,\infty)$ y $p\neq 2$, Q un grafo con al menos un ciclo y $\rho : L_Q\to\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}))$ una representación espacial. Supongamos que existe un morfismo continuo no nulo de $\overline{\rho(L_Q)}$ a $\mathcal{L}(\ell^q(\mathbb{N}))$, entonces $p=q$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi:\overline{\rho(L_Q)}\to\mathcal{L}(\ell^q(\mathbb{N}))$ es un morfismo continuo. Como ρ es espacial, la composición $\rho\circ\iota\circ\Psi$ (en Lema 2.3.4) es espacial por Lema 2.3.4. Definimos $B := \overline{(\rho\circ\iota\circ\Psi)(L_\infty)}$. Entonces aplicando el resultado [20, Lemma 9.1] a $\varphi_{|_B}$, existe un isomorfismo entre $\ell^p(\mathbb{N})$ y un subespacio de $\ell^q(\mathbb{N})$. Es un resultado clásico que un subespacio de dimensión infinita de $\ell^q(\mathbb{N})$ es isomorfo a $\ell^q(\mathbb{N})$, entonces en este caso particular $\ell^p(\mathbb{N})\simeq\ell^q(\mathbb{N})$ [19, Sección 2.a] y por lo tanto $p=q$. ■

Corolario 2.3.6 *Sean $p,q\in[1,\infty)$ distintos y $p\neq 2$. Sean Q y Q' dos grafos finitos, sea $\rho : L_Q\to\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}))$ una representación espacial, y sea $\varphi : L_{Q'}\to\mathcal{L}(\ell^q(\mathbb{N}))$ una representación arbitraria. Entonces, no existe un morfismo continuo no nulo de $\overline{\rho(L_Q)}$ en $\overline{\varphi(L_{Q'})}$.*

Demostración. Sean Ψ y ι los morfismos del Lema 2.3.4, los cuales inducen un morfismo entre las completaciones de las álgebras de Leavitt $\overline{\iota\circ\Psi} : \overline{L_\infty}\to\overline{L_Q}$. Además, la representación φ induce un morfismo $\overline{\varphi}:\overline{L_{Q'}}\to\mathcal{L}(l^q(\mathbb{N}))$. Supongamos que existe un morfismo continuo y no nulo $\phi:\overline{\rho(L_Q)}\to\overline{\varphi(L_{Q'})}$, entonces tendríamos un morfismo continuo no nulo $\overline{\varphi}\circ\phi\circ\overline{\iota\circ\Psi}:\overline{L_\infty}\to\mathcal{L}(l^q(\mathbb{N}))$. Pero además, la composición $\rho\circ\iota\circ\Psi : L_\infty\to\mathcal{L}(l^p(\mathbb{N}))$ es una representación espacial por Lema 2.3.4, y por [20, Lemma 9.1] $l^p(\mathbb{N})$ es isomorfa como espacios de Banach a un subespacio de $l^q(\mathbb{N})$. Igual que en la demostración del Teorema 2.3.5 resulta que $p=q$. ■

En la Sección 2.2 vimos que $\mathcal{O}^p(Q)=\overline{\rho(L_Q)}$ para toda representación espacial $\rho : L_Q\to L^p(X,\mu)$.

Dadas $\rho : L_Q\to L(\ell^p(\mathbb{N}))$ una representación espacial (ver Ejemplo 1.4.6) y $\varphi : L_{Q'}\to\mathcal{L}(\ell^q(\mathbb{N}))$ una representación arbitraria, por Corolario 2.3.6 no existe un morfismo continuo de $\mathcal{O}^p(Q)=\overline{\rho(L_Q)}$ en $\overline{\varphi(L_{Q'})}=\mathcal{O}^q(Q')$.

Podemos resumir este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.7 *Sean $p, q \in [1, \infty)$ distintos, $p \neq 2$, y Q y Q' dos grafos finitos por filas y Q numerable, tales que Q tiene por lo menos un ciclo y sus álgebras de Leavitt asociadas, L_Q y $L_{Q'}$, son simples. Entonces no existe un morfismo continuo de $\mathcal{O}^p(Q)$ en $\mathcal{O}^q(Q')$.*

Chapter 3

Clasificación de las álgebras $\mathcal{O}^p(Q)$ simples

Las álgebras de Leavitt simples fueron clasificadas por Abrams y Aranda Pino en [5] para grafos finitos por filas. En este capítulo clasificaremos las p-álgebras $\mathcal{O}^p(Q)$ simples (en el contexto de L^p álgebras de operadores).

El resultado más importante de este capítulo será que el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ es simple (como álgebra universal) si y sólo si su álgebra de Leavitt asociada L_Q lo es.

Por otro lado, es conocido que los ideales de L_Q están en biyección con los subconjuntos de vértices hereditarios y saturados.

Veremos que en $\mathcal{O}^p(Q)$ esos subconjuntos de vértices están en biyección con los ideales $\mathbb{S}^1$-invariante.

3.1 La acción de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathcal{O}^p(Q)$

El grupo $\mathbb{S}^1$ actua continuamente sobre $\mathcal{O}^p(Q)$ de forma única. Probaremos esto y también que tiene una función de $\mathcal{O}^p(Q)$ en $\mathcal{O}^p(Q)$ asociada que será una herramienta importante en la demostración de los teoremas de unicidad que clasificarán las álgebras $\mathcal{O}^p(Q)$ simples.

Definición 3.1.1 *Sea τ la acción de $\mathbb{S}^1$ sobre el álgebra de Leavitt L_Q definida para cada $z \in \mathbb{S}^1$ como*

$$\begin{aligned} \tau_z : L_Q &\longrightarrow L_Q \\ v &\longmapsto v \\ e &\longmapsto ze \\ e^* &\longmapsto z^{-1}e^* \end{aligned}$$

Proposición 3.1.2 *Sea Q un grafo finito. Entonces existe una única acción γ de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathcal{O}^p(Q)$ tal que $z \mapsto \gamma_z$ es continua, $\gamma_z(e) = ze$ para todo $e \in Q^1$, y $\gamma_z(v) = v$ para todo $v \in Q^0$.*

Demostración. Sea γ la acción de $\mathbb{S}^1$ sobre L_Q definida sobre los generadores como en la Proposición 3.1.2.

Veamos que γ_z es isometrica para todo $z \in \mathbb{S}^1$. Sea $a \in L_Q$ y $z \in \mathbb{S}^1$. Definimos y notamos por $\|a\|_\rho = \|\rho(a)\|$ como en (2.2) a la seminorma asociada a cada representación espacial ρ de L_Q.

Observemos que componer una representación espacial con γ_z es espacial. Por lo tanto,

$$\|a\| := \sup_{\rho \text{ espacial}} \|a\|_\rho = \sup_{\rho \text{ espacial}} \|\gamma_z(a)\|_{\rho\circ\gamma_{\overline{z}}} \leq \|\gamma_z(a)\|.$$

Por otro lado,

$$\|\gamma_z(a)\| = \sup_{\rho \text{ espacial}} \|\gamma_z(a)\|_\rho = \sup_{\rho \text{ espacial}} \|a\|_{\rho\circ\gamma_z} \leq \|a\|.$$

Luego, queda demostrado que $\|\gamma_z(a)\| = \|a\|$.

Además, podemos extender esta acción de manera continua a todo el espacio $\mathcal{O}^p(Q)$. Sean $z \in S^1$, $a \in \mathcal{O}^p(Q)$ y $\epsilon > 0$. Como $|z - w| = |w^{-1}z - 1|$ y $\|\gamma_z(a) - \gamma_w(a)\| = \|\gamma_w(\gamma_{w^{-1}z}(a) - a)\| = \|\gamma_{w^{-1}z}(a) - a\|$ para todo $w \in S^1$, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $w = 1$. Sea $b \in L_Q$ tal que $\|a - b\| < \dfrac{\epsilon}{3}$, entonces

$$\|\gamma_z(a) - a\| \leq \|\gamma_z(a) - \gamma_z(b)\| + \|\gamma_z(b) - b\| + \|b - a\| < \frac{2\epsilon}{3} + \|\gamma_z(b) - b\|.$$

Por la graduación de L_Q dada en la Proposición 1.2.5, existen $q \leq r \in \mathbb{Z}$ and $b_n \in (L_Q)_n$ (la componente de grado n de L_Q) para $n = q, \ldots, r$, tales que $b = \displaystyle\sum_{n=q}^{r} b_n$.

Además, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - 1| < \delta$ entonces $|z^n - 1| < \dfrac{\epsilon}{3\sum_{i=q}^{r}\|b_i\|}$. Entonces se tiene que,

$$\|\gamma_z(b) - b\| = \|\sum_{n=q}^{r}(z^n - 1)b_n\| \leq \sum_{n=q}^{r} |z^n - 1|\|b_n\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

■

Teorema 3.1.3 *Sea Q un grafo finito por filas. Sea τ la acción de la Definición 3.1.1 de $\mathbb{S}^1$ sobre L_Q. Supongamos que $\phi : L_Q \to \mathcal{O}^p(Q)$ es un morfismo tal que $\phi(v) \neq 0$ para todo $v \in Q^0$, y $\phi \circ \tau_z = \gamma_z \circ \phi$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$, entonces ϕ es inyectiva.*

Demostración. Sea $I = \mathrm{Ker}(\phi)$. Si $a \in I$, entonces $\phi(\tau_z(a)) = \sigma_z(\phi(a)) = 0$ y $\tau_z(a) \in I \ \ \forall z \in \mathbb{S}^1$. Luego, I es invariante por la acción de τ. Por [1, Proposition 1.4, (2)] I resulta ser un ideal graduado. Notemos que en la proposición que estamos citando la acción es con dominio un cuerpo infinito salvo el 0, K^*, lo que es esencial para mostrar que si $n < m(\in \mathbb{N})$ entonces existe $t \in K^*$ tal que $t^n \neq t^m$. Esto es un hecho en $\mathbb{S}^1$, y el resto de la demostración se seguiría igual.

Entonces podemos afirmar que I es un ideal graduado de L_Q, y por [2, Proposition 2.4.9] I está generado por el subconjunto de vértices $I \cap Q^0$. Entonces $\phi(v) \neq 0$ para todo $v \in Q^0$ y esto contradice la hipótesis. ■

Corolario 3.1.4 *El morfismo natural $\iota : L_Q \to \mathcal{O}^p(Q)$ es inyectivo.*

Definición 3.1.5 *Sea γ la acción definida en la Proposición 3.1.2. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos a la función $\Phi_n : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{O}^p(Q)$ como*

$$\Phi_n(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \gamma_{e^{i\theta}}(a)\, d\theta.$$

Lema 3.1.6 *Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ y $B_n := \{b \in \mathcal{O}^p(Q) : \gamma_z(b) = z^n b \ \forall (z \in \mathbb{S}^1)\}$. Entonces:*

(a) *Para $c \in B_n$ y $b \in \mathcal{O}^p(Q)$,*

$$\Phi_m(bc) = \Phi_{m-n}(b)c \quad y \quad \Phi_m(cb) = c\Phi_{m-n}(b).$$

(b) *Para $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$,*

$$\Phi_n(\alpha\beta^*) = \begin{cases} 0 & l(\alpha) \neq l(\beta) + n \\ \alpha\beta^* & l(\alpha) = l(\beta) + n \end{cases}.$$

(c) $B_n B_m \subseteq B_{n+m}$.

Demostración. *La demostración es clara usando la Definición 3.1.5 y un argumento de continuidad.* ■

Proposición 3.1.7 *Consideremos el conjunto B_n y la función Φ_n introducidos en el Lema 3.1.6, entonces:*

(a) $Im(\Phi_n) \subseteq B_n$

(b) $\Phi_{n|_{B_n}} = id_{B_n}$. *Más aún, $B_n = Im(\Phi_n)$ por (a).*

(c) $\|\Phi_n\| = 1$

(d) $B_n = \overline{(L_Q)_n}$, *completando la parte de grado n respecto de la norma en L_Q (2.1).*

Demostración. Es facil ver que $\gamma_z(\Phi_n(b)) = z^n\Phi_n(b)$ si $b \in \mathcal{O}^p(Q)$, y esto prueba (a).

Como $\gamma_{e^{i\theta}}$ es una isometría por la Proposición 3.1.2, entonces $\|\Phi_n\| \leq 1$. Por el ítem (b), se tiene que $\|\Phi_n\| = 1$.

Probemos el ítem (d). Es claro que todo elemento $b \in \overline{(L_Q)_n}$ que se aproxima por elementos en $(L_Q)_n$, por un argumento de continuidad, verifica que $\gamma_z(b) = z^n b$. Entonces $b \in B_n$.

Sea $b \in B_n$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $a = (a_m)_m \in L_Q$ (con $a_m \in (L_Q)_m$) tal que $\|b - a\| < \epsilon$. Pero esto implica, por (b) y Lema 3.1.6(b), que existe tal que

$$\|b - a_n\| = \|\Phi_n(b - a)\| < \epsilon.$$

Luego, $b \in \overline{(L_Q)_n}$. ■

Lema 3.1.8 *Sea $\varphi \in (\mathcal{O}^p(Q))'$ (el espacio dual usual). Entonces,*

$$\varphi(\Phi_n(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\varphi(\gamma_{e^{i\theta}}(a))\, d\theta$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathcal{O}^p(Q)$.

Demostración. La función $e^{-in\theta}\varphi(\gamma_{e^{i\theta}}(a))$ es Bochner integrable (ver [13, II § 2, Definition 1]) por [13, II § 2, Theorem 2]. En efecto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|e^{-in\theta}\gamma_{e^{i\theta}}(a)\|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|a\|\, d\theta = \|a\| < \infty.$$

Luego, usando el resultado de [13, II § 2, Theorem 6] completamos la prueba. ■

Corolario 3.1.9 *Sea $a \in \mathcal{O}^p(Q)$. Supongamos que $\Phi_n(a) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ (Φ_n es la definida en Definición 3.1.5). Entonces $a = 0$.*

Demostración. Será suficiente probar que $\varphi(a) = 0$ $\forall \varphi \in (\mathcal{O}^p(Q))'$. Llamamos C_n al n-ésimo coeficiente de Fourier de la función de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{C}$ definida por $z \mapsto \varphi \circ \gamma_z(a)$, donde γ es la acción definida en la Proposición 3.1.2.

Como $\Phi_n(a) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), $\varphi(\Phi_n(a)) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), entonces $C_n = 0$, ($\forall n \in \mathbb{Z}$). Luego, $\varphi \circ \gamma_z(a) = 0$ ($\forall z \in \mathbb{S}^1$) por [26, Theorem 12.16], y en particular si $z = 1$ $\varphi(a) = 0$. ■

3.2 Teoremas de unicidad

En 1980 Cuntz y Krieger ([10]) prueban un teorema de unicidad [23, Theorem 2.4], en donde un morfismo entre la C^*-álgebra de un grafo finito por filas E y una C^*-álgebra asociada a una E-familia Cuntz-Krieger (ver [23, Chapter 1]) que no manda los vértices a cero, es necesariamente un isomorfismo de C^*-álgebras. Extenderemos este resultado a nuestro contexto L^p. Los lemas que necesitaremos previamente serán probados para $p \neq 2$, caso contrario el resultado de unicidad es el menionado anteriormente para C^*-álgebras.

Definición 3.2.1 *Sean $Q_1, Q_2, \dots$ grafos. Definimos el grafo $\coprod_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ como el que tiene vértices y aristas*

$$\left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} Q_i\right)^0 := \coprod_{i\in\mathbb{N}} Q_i^0 \quad y \quad \left(\coprod_{i\in\mathbb{N}} Q_i\right)^1 := \coprod_{i\in\mathbb{N}} Q_i^1.$$

Entonces,

$$L_{\sqcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i} = L_{Q_1} \sqcup L_{Q_2} \sqcup \dots.$$

Ejemplo 3.2.2 *Sea A_d el grafo con d vértices y $d-1$ aristas*

$$_{v_1}\bullet \xrightarrow{e_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet_{v_3} \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_{d-1}} \bullet_{v_d}$$

Por [2, Proposition 1.3.4] el álgebra de matrices de $d \times d$ es isomorfa al álgebra de Leavitt de este grafo. O sea, $M_d \simeq L_{A_d}$.

Sean $d_1, d_2, \dots \in \mathbb{N}$. En particular, usando la Definición 3.2.1, se tiene que

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_{d_i} \simeq L_{\sqcup_{i\in\mathbb{N}} A_{d_i}}.$$

Notación 3.2.3 *Notaremos $M_d^p = \mathcal{L}(l^p(\{1, 2, \dots, d\}))$ con la norma usual de operadores. Algebraicamente estamos identificando M_d^p con la matrices complejas M_d de $d \times d$.*

Nos interesa probar que si L_Q es simple, entonces $\mathcal{O}^p(Q)$ también (en el sentido de la Definición 3.4.1).

A continuación presentaremos algunos resultados previos siguiendo la Notación 3.2.3

Lema 3.2.4 *Sean $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$. Si $\rho : \bigoplus_{i=1}^n M_{d_i} \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ es una representación unital y contractiva como mapa de $\bigoplus_{i=1}^n M_{d_i}^p$ en $\mathcal{L}(L^p(X, \mu))$, entonces ρ es espacial.*

Demostración. Sea $\xi \in S^1$. Sea $E_{j,k}^i$ la matriz canónica $E_{j,k}$ de tamaño $d_i \times d_i$. Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos el elemento $t_{i,j}(\xi) \in \bigoplus_{k=1}^n M_{d_k}$ en el lugar l como

$$(t_{i,j}(\xi))_l := \begin{cases} 1 & i \neq l \\ \xi E_{jj}^i + \sum_{j\neq k=1}^n E_{kk}^i & i = l \end{cases}$$

Notar que $\|t_{i,j}(\xi)\| = 1$ y que $(t_{i,j}(\xi))_l^{-1} := \begin{cases} 1 & i \neq l \\ (t_{ij}(\xi^{-1}))_l & i = l \end{cases}.$

Como ρ es contractiva, $\rho(t_{ij}(\xi))$ es una isometría biyectiva ($\forall i, j, \xi$), y por [20, Lemma 6.16] es espacial entonces le corresponde un sistema espacial $(X, X, S_{ij}(\xi), g_{ij}(\xi))$.

Como $S_{ij}(1) = Id_{\mathcal{B}}$, por [20, Lemma 6.22] se sigue que $S_{i,j}(-1) = Id_{\mathcal{B}}$. Además, $\rho(t_{ij}(-1)) = m(g_{ij}(-1))$ (la multiplicaciòn por $g_{ij}(-1)$, 1.4.7).

Como

$$\left(\frac{1 - t_{i,j}(-1)}{2}\right)_l = \begin{cases} E^i_{jj} & l = i \\ 0 & l \neq i \end{cases}$$

existe una partición de conjuntos medibles $X = \coprod_{i=1}^{n} \coprod_{j=1}^{d_i} X_{ij}$. Notemos $X_i := \coprod_{j=1}^{d_i} X_{ij}$.

Luego, $\rho(E^i_{jj}) = \dfrac{1 - m(g_{ij}(-1))}{2}$ es espacial $\forall i, j$ y por lo tanto, por [20, Theorem 7.2, (1) $\Leftrightarrow$ (5)], $\rho_{|M_{d_i}} : M_{d_i} \to L(L^p(X_i))$ es espacial para todo i.

Por lo tanto, ρ es espacial. ■

Lema 3.2.5 *Sean $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$. Si $\rho : \bigoplus_{i=1}^{n} M_{d_i} \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ es una representación unital, inyectiva y contractiva como mapa de $\bigoplus_{i=1}^{n} M^p_{d_i}$ en $\mathcal{L}(L^p(X, \mu))$, entonces ρ es espacial e isométrica.*

Demostración. Por Lema 3.2.4 probamos que podemos escribir a ρ como $\rho = \bigoplus_{i=1}^{n} \rho_i$ donde $\rho_i : M^p_{d_i} \to L(L^p(X_i))$ son representaciones unitales y contractivas.

Por [20, (4) $\Rightarrow$ (3), Theorem 7.2], las representaciones ρ_i son isométricas, y por lo tanto ρ también lo es.

■

Lema 3.2.6 *Sean $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$. Si $\rho : \bigoplus_{i=1}^{n} M^p_{d_i} \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ es una representación contractiva e inyectiva, entonces ρ es isométrica y espacial.*

Demostración. Consideremos el idempotente $e := \rho(1)$. Entonces podemos descomponer a $L^p(X)$ como una suma directa

$$L^p(X) = \mathrm{Im}(e) \oplus \mathrm{Ker}(e).$$

Sea $R := \bigoplus_{i=1}^{n} M^p_{d_i}$. Entonces,

$$\mathrm{Im}(e) = \rho(1)(L^p(X)) \subseteq \rho(R)L^p(X) = \rho(1)\rho(R)L^p(X) \subseteq \rho(1)L^p(X) \subseteq \mathrm{Im}(e).$$

Análogamente a la demostración del Lema 3.2.5 construimos elementos

$$t_{ij}(\xi) = \rho(\psi_{ij}\xi) \oplus \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}(e)} \in \rho(R)L^p(X) \oplus \mathrm{Ker}(e)$$

Como ρ es contractiva, $\|t_{ij}(\xi)\| \leq 1$.

Además, $t_{ij}^{-1}(\xi) = t_{ij}(\xi^{-1})$ entonces $t_{ij}(\xi)$ es unitaria. Como $p \neq 2$, es espacial. Luego, por [20, Lemma 6.22], existe una función g_{ij} tal que $g_{ij}(-1)^2 = 1$ y $t_{ij}(-1) = m(g_{ij}(-1))$ (la multiplicaciòn por $g_{ij}(-1)$, 1.4.7).

Entonces, $\rho(E^i_{jj}) = \dfrac{1 - t_{ij}(-1)}{2} = \dfrac{1 - m(g_{ij}(-1))}{2}$ y $\dfrac{1 - g_{ij}}{2} = \chi_{Y_{ij}}$ donde $Y_{ij} = \{x/g_{ij}(x) = -1\}$. Luego, $\rho(E^i_{jj})$ es espacial, entonces $\rho(E^i_{pq})$ espacial para todo $p, q, i = 1, \ldots, n$ y luego ρ es espacial.

Notar que los Y_{ij} son disjuntos y que $Y = \coprod_{i,j} Y_{ij}$, entonces

$$e = \rho(1) = \sum_{i,j} \rho(E^i_{jj}) = \sum_{i,j} \chi_{E^i_{jj}} = \chi_Y.$$

Luego, $\mathrm{Im}(e) = L^p(Y)$ y la correstricción de ρ a $L^p(Y)$ es unital, contractiva e inyectiva, entonces es isométrica y por lo tanto ρ también lo es. ■

Lema 3.2.7 *Sea $\rho : \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^p_{d_i} \to \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$ una representación contractiva e inyectiva. Entonces ρ es espacial e isométrica.*

Demostración. Sea $a := (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} M^p_{d_i}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tan que $a_i = 0 \;\; \forall i > n$. Restringiendo ρ a $\bigoplus_{i=1}^{n} M^p_{d_i}$, obtenemos una representación contractiva e inyectiva

$$\rho_n : \bigoplus_{i=1}^{n} M^p_{d_i} \to L(L^p(X))$$

que resulta ser isométrica y espacial por Lema 3.2.6. Entonces

$$\|\rho(a)\| = \|\rho_n(a)\| = \|a\|$$

como queríamos probar. ■

Notación 3.2.8 *Definimos $\mathcal{O}^p(Q)_0 := \overline{(L_Q)_0}$ (clausurando respecto de la norma de la Definición 2.1).*

Proposición 3.2.9 *Sea Q un grafo finito sin fuentes ni pozos y tal que todo ciclo tenga salida. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$ un álgebra de Banach con una acción $\beta : \mathbb{S}^1 \to Aut(\mathcal{B})$ tal que $\beta_z : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ $(\forall z \in \mathbb{S}^1)$ y $\forall b \in B$ $z \mapsto \beta_z(b)$ resultan continuas. Sea $f : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{B}$ un morfismo unital contractivo tal que $f(v) \neq 0$ $(\forall v \in Q^0)$ y*

$$\beta_z \circ f(a) = f \circ \gamma_z(a) \ (\forall a \in \mathcal{O}^p(Q)). \tag{3.1}$$

Entonces f es inyectiva.

Demostración. Como primer paso veamos que f es inyectiva sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$. Como f es contractiva, $f_{|_{\mathcal{O}^p(Q)_{0,n}}}$ es contractiva para todo $n \in \mathbb{N}$, y afirmamos que es isométrica para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $n \in \mathbb{N}$ y $d_i := |P(n, v_i)|$ con $i = 1, \ldots, r$ y $Q^0 = \{v_1, \ldots, v_r\}$.

Observemos que el hecho de que $f(v) \neq 0$ para todo $v \in Q^0$ implica que f es inyectiva sobre $L_{0,n}$ y en particular sobre la parte de grado 0.

Por lo tanto, por el Lema 3.2.6, la restricción de f sobre $L_{0,n} = \bigoplus_{i=1}^{r} M^p_{d_i}$ es isométrica para todo $n \geq 0$. Si ahora tomamos colímite y completamos el álgebra L_0, f resulta isométrica sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$.

Sea $a \in \mathrm{Ker}(f)$. Para ver que $a = 0$, por Corolario 3.1.9, será suficiente probar que $\Phi_n(a) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$.

Asumamos primero que $a \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathcal{O}^p(Q)_n$ (para algún $n \in \mathbb{Z}$).

El morfismo f es isométrico sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$ entonces es inyectivo. Por lo tanto, el caso $n = 0$ es evidente.

Veamos ahora lo que sucede con $n \neq 0$.

Como Q no tiene fuentes, para cada $v \in Q^0$ existe una arista $e_v \in Q^1$ tal que $r(e_v) = v$. Definimos los elementos

$$t_+ = \sum_{v \in Q^0} e_v \ \text{(de grado 1)}$$

y

$$t_- = \sum_{v \in Q^0} e_v^* \ \text{(de grado -1)}.$$

Notemos que se cumple

$$t_- t_+ = 1.$$

Si $n > 0$, $at_-^n \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathcal{O}^p(Q)_0 = \{0\}$, entonces $at_-^n = 0$. Multiplicando a derecha por t_+^n, tenemos que $a = 0$.

Análogamente, en el caso $n < 0$, consideremos el elemento $t_+^n a \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathcal{O}^p(Q)_0 = \{0\}$; multiplicándolo a izquierda por t_-^n obtenemos el mismo resultado.

Si ahora consideramos un elemento $a \in \mathrm{Ker}(f)$ cualquiera, por (3.1)

$$f \circ \Phi_n(a) = \Phi_n \circ f(a) = 0$$

y eso implicaría que $\Phi_n(a) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathcal{O}^p(Q)_n$.

Entonces $\Phi_n(a)$ es un elemento de grado n anulado por f. Estamos entonces en el caso anterior, y por lo tanto $\Phi_n(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que era lo que queríamos probar. ■

Teorema 3.2.10 *Sea Q un grafo finito sin pozos ni fuentes tal que L_Q es simple. Sea $\pi : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$ una representación no nula, entonces π es inyectiva.*

Demostración. Usando un argumento similar al de [23, Proposition 4.2], veamos primero que $\pi(v) \neq 0$ para todo vertice v. Supongamos que $\pi(v) = 0\ \forall v \in Q^0$. Si $e \in Q^1$

$$\pi(e) = \pi(ee^*e) = \pi(e)\pi(r(e)) = 0,$$

entonces π es nula sobre L_Q y como L_Q es denso en $\mathcal{O}^p(Q)$, $\pi = 0$. Por lo tanto, existe $v \in Q^0$ tal que $\pi(v) \neq 0$.

Por otro lado, sea $w \in Q^0$ y veamos que $\pi(w) \neq 0$. Como v no es un pozo, por (CK2) de la Definition 1.2.1 existe $e \in Q^1$ tal que $s(e) = v$ y $\pi(ee^*) \neq 0$. Como $e = ee^*e$, entonces $\pi(e) \neq 0$. Además, como $r(e)$ no es un pozo, $\pi(r(e)) \neq 0$. Aplicamos el procedimiento anterior obteniendo un camino $\alpha \in \mathcal{P}$ tal que $s(\alpha) = v$ y tal que $\pi(z) \neq 0$ para todo vértice z del camino α. Por cofinalidad, existe $\beta \in \mathcal{P}$ tal que $s(\beta) = w$ y termina en un vértice de α, entonces $\pi(w) \neq 0$ ya que $w\beta\beta^* = \beta\beta^* \neq 0$.

Probemos la siguiente desigualdad para todo $a \in \mathcal{O}^p(Q)$,

$$\|\pi(\Phi_n(a))\| \leq \|\pi(a)\| \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Por un argumento de continuidad podemos suponer que $a = \sum_{(\mu,\nu)\in F} \lambda_{\mu,\nu}\mu\nu^*$ con F un conjunto de finitos pares de caminos (μ,ν) tales que $r(\mu) = r(\nu)$.

El mismo argumento que en la demostración de la Proposición 3.2.9, muestra que π es una isometría sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$. Consideremos t_+ y t_- elementos en $\mathcal{O}^p(Q)_1$ y $\mathcal{O}^p(Q)_{-1}$ respectivamente, como definimos en Proposición 3.2.9. Mostraremos que $\|t_+\| = 1$ y analogamente resultará que $\|t_-\| = 1$. Sean ρ una representación espacial no nula y $\xi = (\xi_v)_{v\in Q^0} \in \bigoplus_{v\in Q^0} L^p(X_v)$, entonces

$$\|\rho(t_+)(\xi)\|^p = \sum_{v\in Q^0} \|\rho(e_v)(\xi_v)\|^p_{L^p(X_{s(e_v)})} = \sum_{v\in Q^0} \|\xi_v\|^p = \|\xi\|^p. \tag{3.2}$$

Luego, $\|\rho(t_+)\| = 1$ y tomando supremo sobre todas las representaciones ρ se tiene que $\|t_+\| = 1$.

Sea $n > 0$. Observemos que, como $\|t_+\|, \|t_-\| \leq 1$,

$$\|\Phi_n(a)\| = \|\Phi_n(a)t_-^n t_+^n\| \leq \|\Phi_n(a)t_-^n\| \leq \|\Phi_n(a)\|,$$

y análogamente,

$$\|\pi(\Phi_n(a))\| = \|\pi(\Phi_n(a)t_-^n t_+^n)\| \leq \|\pi(\Phi_n(a)t_-^n)\| \leq \|\pi(\Phi_n(a))\|.$$

Como $\Phi_n(a)t_-^n \in \mathcal{O}^p(Q)_0$ y π es una isometría sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$, resulta que

$$\|\pi(\Phi_n(a))\| = \|\pi(\Phi_n(a)t_-^n)\| = \|\Phi_n(a)t_-^n\| = \|\Phi_n(a)\|. \tag{3.3}$$

De la misma forma, si $n < 0$ se tiene que $t_+^n\Phi_n(a) \in \mathcal{O}^p(Q)_0$, entonces

$$\|\pi(\Phi_n(a))\| = \|\pi(t_-^n t_+^n\Phi_n(a))\| = \|\pi(t_+^n\Phi_n(a))\| = \|t_+^n\Phi_n(a)\| = \|\Phi_n(a)\| \tag{3.4}$$

Entonces, siguiendo la misma demostración de [23, Theorem 2.4] pero en nuestro caso, se tiene que $\|\Phi_n(a)\| \leq \|\pi(a)\|$, $(n \in \mathbb{Z})$ para todo $a \in \mathcal{O}^p(Q)$.

Concluimos que π es inyectiva, por Corolario 3.1.9, $a = 0$. ■

Teorema 3.2.11 *Sea Q un grafo finito por filas tal que L_Q es simple. Sea $\pi : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$ una representación contractiva y no nula, entonces π es inyectiva.*

Demostración. Probemos que podemos suponer que Q no tiene pozos ni fuentes. En efecto, sea Q^+ el grafo Q de manera tal que a cada pozo w le agregamos un camino infinito de la forma

$$_w\bullet \xrightarrow{f_1} \bullet_{v_1} \xrightarrow{f_2} \bullet_{v_2} \xrightarrow{f_3} \dots \tag{3.5}$$

y a cada fuente z le agregamos un camino infinito de la forma

$$\dots\bullet \xrightarrow{g_3} \bullet_{w_2} \xrightarrow{g_2} \bullet_{w_1} \xrightarrow{g_1} \bullet_z. \tag{3.6}$$

Sea $Y := X \sqcup \bigsqcup_{w \text{ pozo}} (X_w \times \mathbb{N}) \sqcup \bigsqcup_{z \text{ fuente}} (X_z \times \mathbb{N})$. Notemos que existen, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, isometrías $\theta_n : L^p(X_w) \to L^p(X_w \times \{n\})$ y $\tau_n : L^p(X_z) \to L^p(X_z \times \{n\})$ (donde θ_0 y τ_0 son las identidades). Definimos la representación

$$\widetilde{\pi} : \mathcal{O}^p(Q^+) \to \mathcal{L}(L^p(Y))$$

como π sobre el grafo Q, y sobre los vértices y aristas que agregamos como

$$\widetilde{\pi}(v_n) := Id_{L^p(X_w\times\{n\})} \quad \text{y} \quad \widetilde{\pi}(w_n) := Id_{L^p(X_z\times\{n\})},$$

y

$$\widetilde{\pi}(f_n) := \theta_n \circ \theta_{n+1}^{-1} \quad \text{y} \quad \widetilde{\pi}(g_n) := \tau_{n+1} \circ \tau_n^{-1}.$$

Observemos que la inclusión $\mathcal{O}^p(Q) \hookrightarrow \mathcal{O}^p(Q^+)$ es isométrica.

Sea $a \in L_Q$.

Entonces

$$||\pi(a)|| = ||\overline{\pi}(a)|| \leq ||a||_{\mathcal{O}^p(Q^+)}$$

y tomando supremo sobre las representaciones espaciales de L_Q

$$||a||_{\mathcal{O}^p(Q)} \leq ||a||_{\mathcal{O}^p(Q^+)}.$$

De manera analoga, si consideramos una representación espacial de L_{Q^+}, restringimos obteniendo una representación espacial de L_Q, y tenemos la otra desigualdad. Luego, las normas $|| \cdot ||_{\mathcal{O}^p(Q)}$ y $|| \cdot ||_{\mathcal{O}^p(Q^+)}$ coinciden sobre L_Q y como L_Q es denso en $\mathcal{O}^p(Q)$, las normas coinciden sobre $\mathcal{O}^p(Q)$.

Como la inclusión $\mathcal{O}^p(Q) \hookrightarrow \mathcal{O}^p(Q^+)$ es isométrica, para ver que π es inyectiva bastará probar que $\widetilde{\pi}$ es inyectiva.

Como Q^+ es un grafo finito por filas y no tiene ni pozos ni fuentes la demostración será similar, con algunas modificaciones, a la del caso finito en el Teorema 3.2.10.

El grafo Q^+ no es siempre cofinal, por lo tanto no va a ser automático el hecho de que $\widetilde{\pi}(v) \neq 0 \ \ (\forall v \in (Q^+)^0)$. Suponiendo que en Q hay por lo menos algún pozo o alguna fuente (caso contrario es trivial), empecemos notando que es cierto para los vértices en $(Q^+)^0 \setminus Q^0$.

Sea $v \in Q^0$. Considero los elementos v_1 y f_1 de (3.5), en caso de existir previamente un pozo w. Notar que $\widetilde{\pi}(w) \neq 0$. Si no,

$$\widetilde{\pi}(v_1) = \widetilde{\pi}(f_1^* f_1) = \widetilde{\pi}(f_1^*)\widetilde{\pi}(w)\widetilde{\pi}(f_1) = 0$$

pero como $v_1 \in (Q^+)^0 \setminus Q^0$ es absurdo.

Por otro lado, w no es una fuente, luego existe $e \in Q^1$ tal que $r(e) = w$ y que además verifica que $\widetilde{\pi}(e) \neq 0$. Como Q es cofinal existe un camino β que comienza en v y termina en e. Luego, la demostración se sigue igual que en el el Teorema 3.2.10.

En caso de existir una fuente z, consideramos w_1 y g_1 de (3.6). Como $g_1^* g_1 = z, \widetilde{\pi}(z) \neq 0$. Como z no es un pozo entonces existe $e \in Q^1$ tal que $s(e) = z$ que además cumple $\widetilde{\pi}(e) \neq 0$. Se sigue igual que el caso anterior.

Por lo tanto $\widetilde{\pi}(v) \neq 0$ para todo $v \in (Q^+)^0$.

Siguiendo los pasos del Teorema 3.2.10, veamos que para todo $a \in \mathcal{O}^p(Q^+)$,

$$||\pi(\Phi_n(a))|| \leq ||\pi(a)|| \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Consideremos los elementos $t_{+,F} = \sum_{v \in F} e_v$ y $t_{-,F} = \sum_{v \in F} e_v^*$, para F un sunconjunto finito de vértices, similares a los definidos en la Proposición 3.2.9.

Por un argumento de continuidad podemos suponer que $a = \sum_{(\mu,\nu)\in F} \lambda_{\mu,\nu}\mu\nu^*$ con F el conjunto de finitos pares de caminos (μ, ν) tales que $r(\mu) = r(\nu)$ y $\lambda_{\mu,\nu} \neq 0$.

El mismo argumento que en la demostración de la Proposition 3.2.9, pero ahora usando el Lema 3.2.7 (dado que puede haber infinitos vértices), muestra que $\widetilde{\pi}$ es una isometría sobre $\mathcal{O}^p(Q^+)_0$. Como $\|t_{+,F}\| = \|t_{-,F}\| = 1$ (al igual que en Teorema 3.2.10), si $n > 0$ elijo $F \subseteq (Q^+)^0$ finito tal que $\Phi_n(a)t_{-,F}t_{+,F} = \Phi_n(a)$ y se sigue la misma cuenta que en (3.3). De la misma forma si $n < 0$ se sigue (3.4).

El resto de la demostración es igual que en el Teorema 3.2.10 y concluimos que $\widetilde{\pi}$ es inyectiva. ■

3.3 Ideales $\mathbb{S}^1$-invariantes / Conjuntos hereditarios y saturados

Presentaremos la biyección que existe entre subconjuntos de vértices hereditarios y saturados y ciertos ideales en $\mathcal{O}^p(Q)$, los $\mathbb{S}^1$-invariantes.

Definición 3.3.1 *Decimos que un ideal cerrado $I \lhd \mathcal{O}^p(Q)$ es $\mathbb{S}^1$-invariante si $\gamma_z(I) = I$ para todo $z \in S^1$, donde γ es la acción de la Proposición 3.1.2.*

Definición 3.3.2 *Un subconjunto $H \subseteq Q^0$ es* hereditario *si cada vez que $v \in H$ y $w \leq v$, se tiene que $w \in H$. Es* saturado *si para cada $v \in Q^0$ tal que $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ y $\{r(e) : s(e) = v\} \subseteq H$, entonces $v \in H$.*

Definición 3.3.3 *Sean Q un grafo y $H \subseteq Q^0$ un subconjunto hereditario y saturado. Sea $Q \setminus H$ el grafo finito definido como $(Q^0 \setminus H, r^{-1}(Q^0 \setminus H), r, s)$.*

Lema 3.3.4 *Sea $H \subseteq Q^0$ hereditario y saturado. Entonces, $\mathcal{O}^p(Q)/I(H) \cong \mathcal{O}^p(Q \setminus H)$.*

Demostración. Resulta de la propiedad universal para $\mathcal{O}^p(Q \setminus H)$. ■

Lema 3.3.5 *Si I es un ideal $\mathbb{S}^1$-invariante de $\mathcal{O}^p(Q)$, entonces $H := I \cap Q^0$ es hereditario y saturado.*

Demostración.

Como $H = (I \cap L_Q) \cap Q^0$ y además $I \cap L_Q$ es un ideal en L_Q entonces por [2, Lemma 2.4.3] el resultado es cierto para L_Q. Luego, H es hereditario y saturado.

■

Lema 3.3.6 *Para cada $H \subseteq Q^0$ denotamos por $I(H)$ a su ideal cerrado asociado de $\mathcal{O}^p(Q)$ generado por H. Si H es hereditario y saturado, entonces $I(H)$ es un ideal $\mathbb{S}^1$-invariante.*

Demostración. Sea $J(H)$ el ideal en L_Q generado por H. Por [2, Lemma 2.4.1] es cerrado. El ideal $J(H)$ tiene una graduación dada por las siguientes componentes $J(H)_n = (L_Q)_n \cap J(H)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Veamos primero que $I(H) = \overline{J(H)}$ para probar que $I(H)$ es $\mathbb{S}^1$-invariante.

Es trivial que $\overline{J(H)} \subseteq I(H)$. Llamemos $I' := \overline{J(H)}$. Observemos que

$$H' := I' \cap Q^0 = J(H) \cap Q^0 = H$$

y por lo tanto

$$I' \supseteq I(H') = I(H).$$

Sea $z \in \mathbb{S}^1$. Sea $a = \sum_{n=-k}^{k} a_n \in J(H)$ con $a_n \in J(H)_n$. Por un lado, $\gamma_z(a) = \sum_{n=-k}^{k} z^n a_n \in J(H)$, entonces $\gamma_z(J(H)) \subseteq J(H)$. Por otro lado, $a = \gamma_z\left(\sum_{n=-k}^{k} z^{-n} a_n\right)$ y se tiene la inclusión que falta $\gamma_z(J(H)) \supseteq J(H)$.

Observemos que $b \in I(H)$ si y solo existe $b = \lim b_n$ con $b_n \in J(H)$ $(\forall n)$, entonces usando que γ_z es continua y que $J(H)$ es $\mathbb{S}^1$-invariante, se tiene que $I(H)$ es $\mathbb{S}^1$-invariante. ■

Teorema 3.3.7 *Sea Q un grafo finito y sin fuentes. Sean $p \in [1, \infty)$ y $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Entonces, existe una correspondencia biyectiva entre los subconjuntos hereditarios y saturados de Q y los ideales $\mathbb{S}^1$-invariantes de $\mathcal{O}^p(Q)$, dada por*

$$H \longrightarrow I(H) \;\; \text{and} \;\; H_I := Q^0 \cap I \longleftarrow I. \tag{3.7}$$

Demostración. Primero observemos que (3.7) está bien definida por el Lema 3.3.5 y el Lema 3.3.6.

Veamos ahora que (3.7) es una biyección. Sea H hereditario y saturado. Es claro que $H \subseteq H_{I(H)}$. Si $v \in I(H)$, por el isomorfismo expuesto en el Lema 3.3.4 tenemos que $v \in H$.

Si I es un ideal $\mathbb{S}^1$-invariante. Es evidente la inclusión $I_{H_I} \subseteq I$. Para probar la inclusión que falta consideremos el morfismo cociente contractivo $\pi : \mathcal{O}^p(Q)/I(H_I) \to \mathcal{O}^p(Q)/I$, que por el Lema 3.3.4 puede ser reemplazado por el morfismo $\pi' : \mathcal{O}^p(Q \setminus H_I) \to \mathcal{O}^p(Q)/I$. Notemos que si $v \in Q^0 \setminus H$, $\pi'(v) \neq 0$, y que además, si consideramos $\widetilde{\gamma}$ a la acción en $\mathcal{O}^p(Q)/I$ que hereda de $\mathcal{O}^p(Q)$, se tiene que $\pi' \circ \gamma_z = \widetilde{\gamma}_z \circ \pi'$. Se sigue de la Proposición 3.2.9 que π', y por lo tanto π, es un isomorfismo. Luego, $I = I(H_I)$. ■

Teorema 3.3.8 *Sea Q un grafo finito sin fuentes tal que su álgebra de Leavitt L_Q es simple. Entonces no existen ideales propios $\mathbb{S}^1$-invariantes en $\mathcal{O}^p(Q)$.*

Demostración. Sea I un ideal en $\mathcal{O}^p(Q)$ $\mathbb{S}^1$-invariante y distinto de $\mathcal{O}^p(Q)$. Veamos que $I = 0$, lo que es equivalente a probar que $H := I \cap Q^0 = \emptyset$ por Teorema 3.3.7. Usando la correspondencia biyectiva entre conjuntos hereditrarios y saturados, e ideales de L_Q probada en [8, Theorem 5.3], el conjunto H está en biyección con el ideal generado por H, $J(H) \triangleleft L_Q$.

Como estamos suponiendo que L_Q es simple, si $J(H) \neq 0$, entonces $J(H) = L_Q$ y $H = Q^0$. Luego $Q^0 \subseteq I$, y por lo tanto $I = \mathcal{O}^p(Q)$ lo que es absurdo. ■

3.4 Teorema de simplicidad

En esta sección definiremos la simplicidad en el sentido de L^p álgebra de operadores y daremos condiciones necesarias y suficientes sobre el grafo Q para que el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ resulte simple. Veremos que estas condiciones coinciden con las del caso $C^*(Q)$ probado en 2006 por Tomforde [25] y el caso del álgebra de Leavitt L_Q en 2008 por Abrams y Aranda Pino [3].

Definición 3.4.1 *Decimos que una L^p-álgebra de operadores $\mathcal{A}$ es simple si todo morfismo contractivo no nulo de $\mathcal{A}$ en otra L^p-álgebra de operadores es inyectivo.*

Cabe destacar que, a diferencia de lo que ocurre en el caso C^*, no todo ideal cerrado es el núcleo de un morfismo entre L^p álgebras de operadores. El ejemplo se puede encontrar en un trabajo reciente de Gardella y Thiel, [15, Theorem 2.5].

Por lo tanto, la Definición 3.4.1 no caracteriza a $\mathcal{O}^p(Q)$ simple como álgebra de Banach, pues podría tener ideales cerrados que no sean el núcleo de un morfismo contractivo entre L^p álgebras de operadores.

Nos interesa probar que L_Q es simple si y solo si $\mathcal{O}^p(Q)$ también lo es (en el sentido de la Definición 3.4.1).

La primera implicación es el Teorema de unicidad 3.4.2 probado en la Sección 3.2.

Teorema 3.4.2 *Si L_Q es simple, entonces $\mathcal{O}^p(Q)$ es simple como L^p-álgebra de operadores.*

Para la reciproca necesitaremos los conjuntos hereditarios y saturados y los ideales $\mathbb{S}^1$ introducidos en la Sección 3.3.

Teorema 3.4.3 *Si $\mathcal{O}^p(Q)$ es simple como L^p-álgebra de operadores, entonces L_Q es simple.*

Demostración. Por [5, Theorem 3.1], L_Q es simple si y solo si los únicos subconjuntos de vértices hereditarios y saturados son $\emptyset$ y Q^0, y todo ciclo en Q tiene salida.

En el caso en que el grafo Q ni es solo un ciclo, ni es un ciclo más entradas, veamos que estas dos condiciones necesarias y suficientes de simplicidad se verifican.

Sea $H \subsetneq Q^0$ es un subconjunto hereditario y saturado propio, entonces consideremos su ideal generado $I(H)$ y por Lema 3.3.4 $\mathcal{O}^p(Q)/I(H) \simeq \mathcal{O}^p(Q \setminus H)$ es una p-álgebra de operadores. Sea $\pi : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{O}^p(Q \setminus H)$ la proyección usual, que además es contractiva y no nula. Como $\mathcal{O}^p(Q)$ es simple, entonces π es inyectiva, y por lo tanto $I(H) = 0$. Por la correspondencia dada en el Teorema 3.3.7 resulta $H = \emptyset$.

Por el [2, Lemma 2.9.6], lo probado antes es equivalente a que Q sea cofinal.

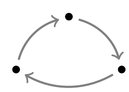
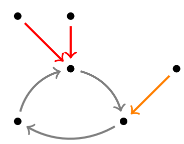
Sea c un ciclo sin salida y sea $H := c^0$ el subconjunto de vértices que aparecen en el ciclo c.

Si ninguna arista e tiene la propiedad de que $r(e) \in H$, entonces es claro que H es hereditario y saturado no vacío. Por lo probado antes, $H = Q^0$, lo cual es absurdo ya que estamos suponinedo que Q no es un solo ciclo.

En el caso en que exista una arista e tal que $r(e) \in c^0$ y que no sea una entrada que empieza en un pozo, entonces existe $f \in Q^1$ tal que $s(f) = s(e)$ (resp. $r(f) = s(e)$) y $r(f) \notin H$ (resp. $s(f) \notin H$). En cualquiera de los dos casos, como Q es cofinal existe un camino α tal que $s(\alpha) \in H$ y $r(\alpha) \in \{s(f), r(f)\}$. Esto significa que el ciclo c tiene una salida, lo que es absurdo.

Falta ver que en el resto de los casos, cuando Q es un solo ciclo c y cuando es un ciclo c con entradas, el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ no es simple. O sea que vamos a probar que en estos casos particulares donde L_Q no es simple, el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ tampoco.

Más allá del número de aristas, a modo de ejemplo, estas serían las dos posibilidades para el grafo Q:

 o de la forma  .

En cualquier caso, existe $c = e_1 e_2 \dots e_d$ un ciclo en el grafo Q y notemos a sus vértices como $v_i := s(e_i)$ con $i = 1, \dots, d$. Sean f_{j_i} las aristas que son entradas del ciclo, con $w_{j_i} := s(f_{j_i})$ y $v_i = r(f_{j_i})$.

Numeramos al resto de las aristas (o sea, las entradas f_{j_i} en el caso de haber) a partir del natural $d + 1$ en adelante, en el orden $1_1, 2_1, \dots, 1_2, 2_2, \dots, 1_n, 2_n, \dots$ y los notamos n_{j_i}. Consideremos el conjunto $X := \{1, \dots, d\} \cup \{n_{j_i} \in \mathbb{N}_{>d}\}_{j_i}$ con la medida de contar.

Sea $\pi : L_Q \to L(L^p(X))$ la representación espacial definida sobre las aristas y sobre sus estrellas como:

$$\begin{array}{rcl} e_i & \mapsto & E_{i,i+1} \\ e_n & \mapsto & E_{n,1} \\ e_i^* & \mapsto & E_{i+1,i} \\ f_{j_i} & \mapsto & E_{j_i,i} \\ f_{j_i}^* & \mapsto & E_{i,j_i} \end{array}$$

(donde las matrices $E_{i,j}$ son las matrices canónicas), y luego extendemos lineal y multiplicativamente.

Es claro que $\pi(c) = \pi(c^2) = E_{1,1}$, entonces π no es inyectiva. Podemos extender el morfismo π a toda el álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$, entonces existe un morfismo contractivo $\widetilde{\pi} : \mathcal{O}^p(Q) \to L(L^p(X))$ de manera que $\widetilde{\pi}|_{L_Q} = \pi$. Como $\iota : L_Q \hookrightarrow \mathcal{O}^p(Q)$ es inyectiva por Corolario 3.1.4 y $\widetilde{\pi} \circ \iota = \pi$, entonces $\widetilde{\pi}$ no es inyectiva dado que π no lo es.

Encontramos un morfismo contractivo y no nulo $\widetilde{\pi} : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{L}(L^p(X))$ no inyectivo, entonces $\mathcal{O}^p(Q)$ no es simple como L^p álgebra. ∎

Corolario 3.4.4 *$\mathcal{O}^p(Q)$ simple si y solo si, Q es cofinal y todo ciclo tiene salida.*

Demostración. Por [2, Lemma 2.9.6], [5, Theorem 3.1], Teorema 3.4.2 y Teorema 3.4.3. ■

Corolario 3.4.5

$$\mathcal{O}^p(Q) \textit{ simple } \iff C^*(Q) \textit{ simple } \iff L_Q \textit{ simple.}$$

Demostración. Por Teorema 3.4.3, Teorema 3.4.2, Corolario 3.4.4 y [23, Theorem 4.14]. ■

Chapter 4

La K-teoría de $\mathcal{O}^p(Q)$ cuando L_Q es simple

En 2011, Phillips calculó la K-teoría de las álgebras $\mathcal{O}^p_d$ ([21]). Anteriormente, en 2009, Ara, Brustenga y Cortiñas calcularon la K-teoría de álgebras de Leavitt para grafo finitos por filas ([6]). Parte de estos resultados nos permitirán, en este último capítulo de la tesis, calcular la K-teoría del álgebra $\mathcal{O}^p(Q)$ para Q un grafo finito por filas cuando L_Q es simple. El cálculo estará basado en la sucesión Pimsner-Voiculescu para el producto cruzado reducido en el contexto L^p, [22].

Consideraremos el producto cruzado reducido para una L^p álgebra en particular que presentaremos en la siguiente sección, y que será un colimíte en la categoría de álgebras de Banach con morfismos contractivos, considerada por Phillips en [22].

4.1 La L^p-álgebra $\overline{\mathrm{colim}}\,\mathcal{O}^p(Q)_0$

Sea Q un grafo finito y sin fuentes. Consideremos los elementos $t_+ = \sum_{v\in Q^0} e_v$ y $t_- = \sum_{v\in Q} e_v^*$ definidos en la Proposición 3.2.9. Definimos el morfismo isométrico $\alpha : \mathcal{O}^p(Q)_0 \to \mathcal{O}^p(Q)_0$ por $\alpha(a) := t_+ a t_-$ y notamos por $S := \overline{\mathrm{colim}}_\alpha \mathcal{O}^p(Q)_0$ al colímite en la categoría de las álgebras de Banach con morfismos contractivos, inducido por α de $\mathcal{O}^p(Q)_0$. Más adelante extenderemos esta notación para α siendo un endomorfismo de L_0, o de $\mathcal{O}^p(Q)_0$, o de $\mathcal{O}^p(Q)$.

Lema 4.1.1 *S es una L^p-álgebra de operadores.*

Demostración. Queremos representar de forma isométrica el álgebra S en algún espacio de medida X.

A continuación construiremos este espacio X a partir del conjunto de caminos de longitud finita $\mathcal{P}$.

Sea $D_v := \{\gamma \in \mathcal{P} : e_v \geq \gamma\}$ y $D := \cup_{v\in Q^0} D_v$. Definimos dos aplicaciones $m_- : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ como $m_-(\gamma) = e_{s(\gamma)}\gamma$ y $m_+ : D \to \mathcal{P}$ $m_+(\gamma) = e_v^*\gamma$ si $\gamma \in D_v$.

Sea $X := \text{colim}(\mathcal{P} \xrightarrow{m_-} \mathcal{P} \ldots)$ y sean $P_i := P$ lo que hay en el lugar i.

En el Ejemplo 1.4.6 construimos una representación ρ espacial de L_Q en $\mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}))$. Restringiendo a $\mathcal{O}^p(Q)_0$ obtenemos un morfismo a $\overline{\text{colim}_\psi \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_i))}$ (donde $\psi : \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_i)) \to \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_{i+1}))$ el morfismo conjugar por m_+^* y m_-^*), que pasa al colímite dado que α es una isometría.

Entonces existe un morfismo $\pi : S \to \overline{\text{colim}\mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_i))}$. Si probamos que existe un morfismo isométrico σ de $\overline{\text{colim}_\psi \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_i))}$ en $\mathcal{L}(L^p(X))$, luego habremos representado a S sobre $L^p(X)$ por $\sigma \circ \pi$.

Construcción de σ:

Como X es un colímite existen morfismos de $\mathcal{P}$ en X que en cada lugar i lo llamaremos $\theta_i : \mathcal{P}_i \to X$. Estos inducen $(\forall i)$ aplicaciones de $L^p(X)$ en $L^p(\mathcal{P}_i)$ que llamaremos θ_i^*.

Sea $Y := \text{colim}(D \xrightarrow{m_+} D \ldots)$. Para cada i vamos a definir una aplicación $\tau_i : Y \to \mathcal{P}_i$ de la siguiente manera: si $j \geq i$, tenemos las funciones $(m_+)^{j-i} : D_j := D \to P_i$, como además el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_j \arrow[r, "m_-"] \arrow[d, "(m_+)^{j-i}"'] & D_{j+1} \arrow[dl, "(m_+)^{j+1-i}"] \\ \mathcal{P}_i & \end{tikzcd}$$

conmuta, lo podemos extender al colímite. Analogamente, notamos por τ_i^* al morfismo de $L^p(\mathcal{P}_i)$ en $L^p(X)$ inducido por τ_i identificando $L^p(Y) \subseteq L^p(X)$.

Sea $\sigma_i : \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_i)) \to \mathcal{L}(L^p(X))$ el morfismo

$$f \mapsto \tau_i^* \circ f \circ \theta_i^*.$$

Veamos que pasa al colímite, o sea que $\sigma_{i+1} \circ \psi = \sigma_i$.

Como el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_i \arrow[r, "m_-"] \arrow[d, "\theta_i"'] & \mathcal{P}_{i+1} \arrow[dl, "\theta_{i+1}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

conmuta $m_-^* \circ \theta_{i+1}^* = \theta_i^*$.

Además, el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "m_+"] & D_{i+1} \\ Y \arrow[u, "\tau_i"] \arrow[ur, "\tau_{i+1}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces

$$\tau_{i+1}^* \circ m_-^* = \tau_i^*.$$

Luego, para $f \in \mathcal{L}(L^p(\mathcal{P}_i))$ resulta que

$$\sigma_i(f) = \tau_i^* \circ f \circ \theta_i^* = \tau_{i+1}^* \circ m_-^* \circ f \circ m_-^* \circ \theta_{i+1}^* = \sigma_{i+1} \circ \psi(f).$$

Observar que $\pi \circ \sigma$ es un morfismo contractivo que no manda los vértices a cero. Luego, sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$ es inyectivo y al igual que en la demostración de la Proposición 3.2.9, resulta isométrico sobre $\mathcal{O}^p(Q)_0$. Como los morfismos del colímite S son isométricos, el morfismo es isométrico también sobre S. Hemos probado que S es una L^p álgebra de operadores. ■

4.2 Producto cruzado reducido

Los productos cruzados que estudiaremos a continuación serán de gran importancia para calcular la K-teoría. Consideraremos el producto cruzado en el contexto de L^p-álgebras introducido por Phillips en [21] y su sucesión exacta larga análoga a la de Pimsner-Voiculescu.

La estrategia para calcular la K-teoría será usar Pimsner-Voiculescu (en contexto L^p) para el producto cruzado de S con $\mathbb{Z}$.

Las definiciones de representación covariante y producto cruzado consideradas por Phillips en [21] las recordaremos a continuación.

Definición 4.2.1 *Sea A es un álgebra de Banach, G es un grupo localmente compacto y α una acción de G sobre A.*

1. *Una* representación covariante *(π, w) de (A, G, α) sobre un espacio $L^p(X, \mu)$ es una representación w de G en operadores inversibles de $L^p(X, \mu)$, $g \mapsto w_g$, tal que $g \mapsto w_g\xi$ es continua $\forall \xi \in L^p(X, \mu)$, y una representación $\pi : A \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ tal que*

$$\pi(\alpha_g(a)) = w_g \rho(a) w_g^{-1} \ \ (\forall g \in G, a \in A).$$

2. *Una representación covariante es* contractiva *si verifica $\|w_g\| \leq 1 \ \ \forall g \in G$ y ρ es contractiva.*

3. *([22, Notation 3.1]) Sea (π, w) una representación covariante de (A, G, α) sobre un espacio $L^p(X)$ entonces definimos el producto de convolución*

$$(\pi \rtimes w)(a)(\xi) := \int_G \pi(a(g)) w_g(\xi) d\nu(g)$$

   para $a \in C_c(G, A, \alpha)$ y $\xi \in L^p(X)$.

   Notamos por $A \rtimes_\alpha G$ a $C_c(G, A, \alpha)$ con este producto de convolución.

4. *([14, Definition 3.2]) Sea $\mathcal{R}$ una clase no vacía de representaciones continuas covariantes. Definimos la seminorma*

$$\sigma^{\mathcal{R}}(f) := \sup_{(\pi,w)\in\mathcal{R}} \|\pi \rtimes w(f)\|$$

para $f \in C_c(G, A, \alpha)$.

5. *([22, Definition 2.12]) (π, w) es una representacion covariante regular si π es contractiva, w isométrica y verifican que hay una $\pi_0 : A \to \mathcal{L}(L^p(X))$ representación contractiva tal que*

$$(\pi(a)(\xi))(h) = \pi_0(\alpha_h^{-1}(a))(\xi(h))$$

para $a \in A,\ h \in G,\ \xi \in C_c(G, L^p(X))$ y

$$w_g(\xi)(h, x) = \xi(g^{-1}h, x)$$

para $g, h \in G,\ \xi \in L^p(G \times X)$ y $x \in X$.

6. *([22, Definition 3.3]) Definimos al producto cruzado reducido $F_r^p(A, G, \alpha)$ como la completación de $C_c(G, A, \alpha)/Ker(\sigma^{\mathcal{R}})$ en la norma $\|\cdot\|^{\mathcal{R}}$ inducida por $\sigma^{\mathcal{R}}$, siendo $\mathcal{R}$ la familia de representaciones covariantes regulares que vienen de representaciones contractivas.*

Estas definiciones las utilizaremos cuando el grupo sea discreto, más precisamente $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.2.2 *([22, Theorem 3.7])*

- *Existe un morfismo $\iota_r : C_c(G, A, \alpha) \to F_r^p(A, G, \alpha)$ tal que si (π, w) es una representación covariante regular de (A, G, α) en $L^p(X)$, existe una única representación $\rho_{w,\pi} : F_r^p(A, G, \alpha) \to \mathcal{L}(L^p(X))$ que verifica $\rho_{w,\pi} \circ \iota_r = \pi \rtimes w$.*

- *Si $a \in F_r^p(A, G, \alpha)$, entonces*

$$\|a\|^{\mathcal{R}} = \sup\{\|\rho_{w,\pi}(a)\| : (\pi, w)\ \sigma - \textit{finita, no degenerada, contractiva y regular}\}.$$

Sean $C := \mathrm{colim}_\alpha L_0$ y $\varphi_n : L_0 \to C$ los morfismos canónicos al colímite. Sea $C[u, u^{-1}, \alpha] = C \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ el producto cruzado algebraico. Llamando $e_n := \varphi_n(1)$, como en [6, proof of Theorem 3.6] existen isomorfismos $\psi_n : L_0[t_+, t_-, \alpha] \to e_n C[u, u^{-1}, \alpha]e_n$ donde $\psi_n(a) = \varphi_n(a)$ para $a \in L_0$, $\psi_n(t_+) = e_n u e_n$ y $\psi_n(t_-) = e_n u^{-1} e_n$.

Notar que $C[u, u^{-1}, \alpha]$ y es densa en $C_c(S, \mathbb{Z}, \alpha)$.

Sea (π, w) es una representación regular de $(S, \mathbb{Z}, \alpha)$ en $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{Z} \times X))$, entonces tiene asociada una representación contractiva π_0 (ver Definición 4.2.1). A partir de π y ψ_n definiremos representaciones de L_Q, que llamaremos $\rho_n : L_Q = L_0[t_+, t_-, \alpha] \to \mathcal{L}(L^p(X))$, como $\pi_0 \circ \varphi_n$ sobre L_0 y $\rho(t_\pm) := \pi \circ \psi_n(t_\pm)$.

Lema 4.2.3 *Sea $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$. Si (π, w) es una representación regular de $(S,\mathbb{Z},\alpha)$ en $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{Z}\times X))$, entonces ρ_n es una representación espacial $\forall n$.*

Demostración. Por Lema 3.2.6 $\pi_0 \circ \varphi_n$ es espacial, y en particular $\pi_0(e_n)$ es un idempotente espacial.

Como $\pi(u)$ y $\pi(u^{-1})$ son unitarios, luego por [20, Lemma 6.16] son isometrías espaciales, y por lo tanto $\rho_n(t_\pm)$ también.

Basta ver que $\rho_n(e)$ es una isometría parcial espacial para todo $e \in Q^1$ y habremos probado que ρ_n es espacial. Escribimos a una arista como producto de un elemento en L_0 y t_+ de la siguiente manera:

$$e = et_-t_+ \in L_0 t_+$$

luego, $\rho_n(e)$ resulta ser una composición de dos isometrías espaciales, y por lo tanto también lo es. ■

Lema 4.2.4 *Sea Q un grafo finito sin fuentes tal que L_Q es simple. Entonces*

$$F^p_r(S,\mathbb{Z},\alpha) = \overline{colim_\alpha} \mathcal{O}^p(Q).$$

Demostración. El producto cruzado reducido $F^p_r(S,\mathbb{Z},\alpha)$ es la completació del producto cruzado algebraico $C \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ respecto de la norma del Teorema 4.2.2. Como por el Lema 4.2.3 cada representación covariante regular y contractiva $\rho_{w,\pi}$ tiene representaciones espaciales asociadas ρ_n de L_Q, y L_Q la estamos suponiendo simple, entonces por Teorema 2.2.8 $\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\rho_n(L_Q)}$ y podemos completar el colímite respecto de una representación espacial en particular. Además, los morfismos de transición son isometrías, entonces $\overline{\mathrm{colim}_\alpha} \mathcal{O}^p(Q)$ es la completación del colímite algebraico $\mathrm{colim} L_Q$ con la norma inducida por L_Q.

Entonces resulta que

$$F^p_r(S,\mathbb{Z},\alpha) = \overline{C \rtimes_\alpha \mathbb{Z}} = \overline{(\mathrm{colim}_\alpha L_0) \rtimes \mathbb{Z}} = \overline{\mathrm{colim}_\alpha L_0[t_+, t_-, \alpha]} = \overline{\mathrm{colim}_\alpha L_Q} = \overline{\mathrm{colim}_\alpha} \mathcal{O}^p(Q).$$

■

Corolario 4.2.5 $K_*(F^p_r(S,\mathbb{Z},\alpha)) = K_*(\mathcal{O}^p(Q))$

Dividiremos la siguiente sección en dos partes, el caso finito y sin fuentes, y el caso general finito por filas.

4.2.1 K-teoría: caso finito y sin fuentes

Phillips demuestra en [21, Theorem 6.15] que es válida la sucesión de Pimsner-Voiculescu en el contexto de L^p álgebras de operadores. Aplicando este resultado para S como en la sección anterior (4.2) y usando el Corolario 4.2.5 tenemos la sucesión que sigue:

$$\begin{tikzcd} K_0(S) \arrow[r, "id-\widehat{\alpha}_*"] & K_0(S) \arrow[r, "\epsilon_*"] & K_0(\mathcal{O}^p(Q)) \arrow[d, "\partial"] \\ K_1(\mathcal{O}^p(Q)) \arrow[u, "\partial"] & K_1(S) \arrow[l, "\epsilon_*"] & K_1(S) \arrow[l, "id-\widehat{\alpha}_*"] \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Por un lado,

$$K_1(S) = K_1(\overline{\mathrm{colim}_\alpha}\mathcal{O}^p(Q)_0) = \mathrm{colim}K_1(\mathcal{O}^p(Q)_0) = 0$$

ya que

$$K_1(\mathcal{O}^p(Q)_0) = K_1(\overline{L_0}) = K_1(\overline{\mathrm{colim}L_{0,n}}) = \mathrm{colim}K_1(L_{0,n}) = 0.$$

En el Lema 4.2.4 probamos que $F^p_r(S,\mathbb{Z},\alpha) = \overline{\mathrm{colim}_\alpha}\mathcal{O}^p(Q)$, entonces resulta la siguiente sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{colim}K_1(\mathcal{O}^p(Q)) \longrightarrow K_0(S) \xrightarrow{id-\alpha_*} K_0(S) \longrightarrow \mathrm{colim}K_0(\mathcal{O}^p(Q)) \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

El morfismo $\alpha : \mathcal{O}^p(Q) \to \mathcal{O}^p(Q)$ (que es conjugar por los elementos t_+ y t_-) induce la identidad en los grupos K_n, entonces nos queda la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow K_1(\mathcal{O}^p(Q)) \longrightarrow K_0(S) \xrightarrow{id-\alpha_*} K_0(S) \longrightarrow K_0(\mathcal{O}^p(Q)) \longrightarrow 0$$

Luego,

$$K_1(\mathcal{O}^p(Q)) = \mathrm{Ker}(K_0(S) \xrightarrow{id-\alpha_*} K_0(S))$$

y

$$K_0(\mathcal{O}^p(Q)) = \mathrm{Coker}(K_0(S) \xrightarrow{id-\alpha_*} K_0(S))$$

En [6] se define una matriz $N'_Q \in \mathbb{Z}^{(Q^0\times Q^0)}$ cuyas entradas $n_{i,j}$ son la cantidad de aristas que hay de i a j para un grafo Q finito por filas. Sacando las columnas correspondientes a los pozos a las matrices N'^t_Q y la identidad se obtienen matrices que se notarán N^t_Q y 1 en $\mathbb{Z}^{(Q^0\times(Q^0\setminus\mathrm{Sinks}(Q)))}$, respectivamente.

En este caso particular el grafo es finito entonces notaremos $d := |Q^0|$ y $d' := |\mathrm{Sinks}(Q)|$ y como

$$K_0(S) = K_0(\mathcal{O}^p(Q)_0) = K_0(\overline{L_0}) = K_0(\overline{\mathrm{colim}L_{0,n}}) = \mathrm{colim}K_0(L_{0,n}),$$

por [6, proof of Theorem 5.10] resulta que

$$\mathrm{Coker}(K_0(S) \xrightarrow{id-\alpha_*} K_0(S)) = \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}^{d-d'} \xrightarrow{1-N^t_Q} \mathbb{Z}^d)$$

y que

$$\mathrm{Ker}(K_0(S) \xrightarrow{id-\alpha_*} K_0(S)) = \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^{d-d'} \xrightarrow{1-N_Q^t} \mathbb{Z}^d).$$

Con lo probado anteriormente más [23, Lemma 7.12] resulta que la K-teoría topológica de $\mathcal{O}^p(Q)$ y la $C^*(Q)$ (la C^* del grafo Q) coinciden.

Teorema 4.2.6 *Sea Q un grafo finito sin fuentes tal que L_Q es simple, entonces*

$$K_*(\mathcal{O}^p(Q)) = K_*(C^*(Q)).$$

4.2.2 K-teoría: caso finito por filas

Extenderemos el Teorema 4.2.6 al caso en que el grafo es finito por filas tal que L_Q es simple. Para demostrarlo necesitaremos cierta notación previa que daremos a continuación.

Notación 4.2.7 *Para un camino $\gamma \in \mathcal{P}$, denotamos por $v(\gamma)$ a todos los vértices que aparecen en el camino. Escribimos como $P_Q = \{\gamma \in \mathcal{P} : |v(\gamma)| = l(\gamma) + 1\}$ al conjunto de los caminos que no se cortan a sí mismos. Sea $\widetilde{Q}$ el gráfico cuyos vértices son*

$$\widetilde{Q}^0 : \{v \in Q^0 : r_{\mathcal{P}}(v) \not\subseteq P_Q\}$$

(o sea, son todos los vértices de Q con excepción de los que son rango de caminos que no se cortan a sí mismos) y el conjunto de las aristas es

$$\widetilde{Q}^1 := \{e \in Q^1 : s_Q(e) \in \widetilde{Q}^0\}.$$

Proposición 4.2.8 *Sea Q un grafo finito por filas. Si L_Q es simple entonces L_F es simple para todo $F \subseteq Q$ un subgrafo completo de Q.*

Demostración. Recordemos que si E es un grafo finito por filas, [5, Theorem 3.1] y [2, Lemma 2.9.6], L_E resulta simple si y solo si:

- Todo ciclo tiene al menos una salida.
- E es cofinal (ver Definición 1.1.1).

Usando el resultado anterior probaremos los dos ítems mencionados. Sea γ un ciclo en F, entonces existe una salida $e \in Q^1$ ya que L_Q es simple. Sea $v := s(e) \in F^0$. Como F es completo, $s_F^{-1}(v) = s_E^{-1}(v)$ y $e \in F^1$.

Veamos que F es cofinal. Sean $v \in F^0$, γ un camino infinito en F y $w \in F^0$ un vértice en γ. Como L_Q es simple, existen $n \in \mathbb{N}_0$ y un camino $\alpha := \alpha_1 \dots \alpha_n$ en Q tal que $s(\alpha) = v$ y $r(\alpha) = w$. Ademas, $\alpha_1 \in s_E^{-1}(v) = s_F^{-1}(v)$ entonces $\alpha_1 \in F^1$. Siguiendo este proceso, se obtiene que $\alpha_i \in F^1, \forall i = 1, \dots n$, y α es un camino en F.

■

Teorema 4.2.9 *Sea Q un grafo finito por filas tal que L_Q es simple, entonces*

$$K_*(\mathcal{O}^p(Q)) = K_*(C^*(Q)).$$

La demostración en el caso finito está basada en [6, Theorem 6.3] para poder suponer que el grafo no tiene fuentes. Luego, extendemos esto a un grafo finito por filas.

Demostración. Supongamos primero que Q es un grafo finito arbitrario. Sean $d := |Q^0|$ y $d' := |\mathrm{Sink}(Q)|$. Consideremos el subgrafo $F \subseteq Q$ definido por $F^0 := \widetilde{Q}^0 \cup \mathrm{Sink}(Q)$ y $F^1 := \widetilde{Q}^1$, a partir de la Notación 4.2.7.

De [6, lemma 6.2] se deduce que F es completo. Sean $t := |F^0|$ y $k := d - t$. Si $k > 0$, por [6, Theorem 6.3], existe una cadena finita y creciente de subgrafos completos

$$F = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_k = Q$$

con las siguientes propiedades para todo $i = 0, \ldots, k$;

- $|E_{i+1}^0 - E_i^0| = 1$.
- $\mathrm{Sink}(E_i) = \mathrm{Sink}(Q)$.
- Existe $p_i \in L_{\mathbb{Z}}(E_i)$ tal que $L_{\mathbb{Z}}(E_{i+1}) \simeq p_i L_{\mathbb{Z}}(E_i) p_i$.
- El núcleo y conúcleo de $\mathbb{Z}^{t+i-d'} \xrightarrow{1-N_{E_i}^t} \mathbb{Z}^{t+i}$ y de $\mathbb{Z}^{t+i+1-d'} \xrightarrow{1-N_{E_{i+1}}^t} \mathbb{Z}^{t+i+1}$ coinciden.

Se desprende de estas propiedades que existe $a \in L_Q$ tal que $L_F \simeq aL_F a$, entonces $K_*(\mathcal{O}^p(Q)) \simeq K_*(\mathcal{O}^p(F))$. Como el grafo F es finito, sin fuentes y por la Proposición 4.2.8 L_F es simple, aplicamos el Teorema 4.2.6.

Si ahora Q es un grafo finito por filas, por [8, Lemma 3.2] sabemos que Q es colímite filtrante de sus subgrafos F finitos y completos. Como además L_Q es simple, entonces la norma en $\mathcal{O}^p(Q)$ no depende de la representación espacial (Teorema 2.2.12) y

$$\mathcal{O}^p(Q) = \overline{\mathrm{colim}_F}\, \mathcal{O}^p(F).$$

Esto implica que

$$K_0(\mathcal{O}^p(Q)) = \mathrm{colim}\, K_0(\mathcal{O}^p(F)) = \mathrm{colim}\, \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}^{|F^0 \setminus \mathrm{Sink}(F)|} \xrightarrow{1-N_F^t} \mathbb{Z}^{|F^0|})$$

y

$$K_1(\mathcal{O}^p(Q)) = \mathrm{colim}\, K_1(\mathcal{O}^p(F)) = \mathrm{colim}\, \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}^{|F^0 \setminus \mathrm{Sink}(F)|} \xrightarrow{1-N_F^t} \mathbb{Z}^{|F^0|}).$$

Luego,

$$K_0(\mathcal{O}^p(Q)) = \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}^{\left(|Q^0 \setminus \mathrm{Sink}(Q)|\right)} \xrightarrow{1-N_Q^t} \mathbb{Z}^{\left(|Q^0|\right)}$$

y

$$K_1(\mathcal{O}^p(Q)) = \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}^{(|Q^0\setminus \mathrm{Sink}(Q)|)} \xrightarrow{1-N_Q^t} \mathbb{Z}^{(|Q^0|)}.$$

Entonces por [6, proof of Theorem 5.10], la K-teoría topológica de $\mathcal{O}^p(Q)$ y $C^*(Q)$ coinciden por [23, Lemma 7.12]. ■

Corolario 4.2.10 *Sea Q un grafo finito por filas tal que L_Q es simple, entonces*

$$K_*(\mathcal{O}^p(Q)) = K_*(\mathcal{O}^2(Q)).$$

Demostración. Por Ejemplo 2.1.2 y Teorema 4.2.9. ■

Bibliography

[1] G. Abrams, P. N. Ánh, E. Pardo, *Isomorphisms between Leavitt algebras and their matrix rings*, J. Reine Angew. Math., 624 (2008), 103–132.

[2] G. Abrams, P. Ara, Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Springer (2015).

[3] G. Abrams, G. Aranda Pino, *The Leavitt path algebra of a graph*, J. Algebra 293 (2) (2005), 319–334.

[4] G. Abrams, G. Aranda Pino, *Purely infinite simple Leavitt path algebras*, J. Pure Appl. Algebra 207 (2006), no. 3, 553–563.

[5] G. Abrams, G. Aranda Pino, *The Leavitt path algebras of arbitrary graphs*, Houston J. Math., 34 (2) (2008), 423–442.

[6] P. Ara, M. Brustenga, G. Cortiñas, *K-theory of Leavitt path algebras*, Münster J. of Math. 2 (2009), 5–34.

[7] P. Ara, M. A. González-Barroso, K. R. Goodearl, E. Pardo, *Fractional skew monoid ring*, J. Algebra 278 (2004), 104–126.

[8] P. Ara, M. A. Moreno, E. Pardo, *Nonstable K-theory for graph algebras*, Algebr. Represent. Theory 10 (2007), 157–178.

[9] J. Cuntz. *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys., **2**, Vol.57 (1977), 173–185.

[10] J. Cuntz, W. Krieger. *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math., **3**, Vol.56 (1980), 251–268.

[11] J. Cuntz *A class of C^*-algebras and topological Markov chains. II. Reducible chains and the Ext-functor for C^*-algebras.*, Invent. Math. 63 (1981), no. 1, 25–40.

[12] K. R. Davidson, *C^*-algebras by example*, Fields Institute Monograph Series, Amer. Math. Soc. Providence, RI, Vol. 6 (1996).

[13] J. Diestel, J.J Uhl, Jr., *Vector Measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence (1977).

[14] S. Dirksen, M. de Jeu, and M. Wortel, *Crossed products of Banach algebras*, I , Dissertationes Math., to appear. (arXiv:1104.5151v2 [math.OA])

[15] E. Gardella, H. Thiel, *Quotients of Banach algebras acting on L^p-spaces*, disponible en *arXiv:1412.3985*.

[16] J. Lamperti, *On the isometries of certain function-spaces*, Pacific J. Math. 8 (1958), 459–466.

[17] W.G. Leavitt, *The module type of a ring*, Trans. A.M.S. 42 (1962), 113–130.

[18] W.G. Leavitt, *The module type of homomorphic images*, Duke Math. J. 32 (1965), 305–311.

[19] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 92, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1977.

[20] N. C. Phillips, *Analogs of Cuntz algebras on L^p spaces*, preprint (arXiv:1201.4196 [math.FA]).

[21] N. C. Phillips, *Crossed Products of L^p Operator Algebras and the K-Theory of Cuntz Algebras on L^p Spaces*, preprint (arXiv:1309.6406v1 [math.FA]).

[22] N. C. Phillips, *Simplicity of UHF and Cuntz algebras on L^p-spaces*, preprint (arXiv:1309.0115 [math.FA]).

[23] I. Raeburn, *Graph Algebras*, BMS Regional Conference Series in Mathematics, vol.103. American Mathematical Society, Providence (2005).

[24] I. Raeburn, W. Szymański, *Cuntz-Krieger algebras of infinite graphs and matrices*, Trans. A.M.S. 356 (1) (2004), 39–59.

[25] Tomforde, M. *Structure of graph C *-algebras and their generalizations*, In: Pino, G.A., Domènech, F.P., Molina, M.S. (eds.) Graph Algebras: Bridging the Gap Between Analysis and Algebra. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga, Málaga, Spain (2006).

[26] R. I. Wheeden, A. Zigmund, *Measure and integral: An introduction to real analysis*, M. Dekker, New York (1977).